

S. KOSEL

Problemas de Física

PROBLEMAS DE FÍSICA

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Под редакцией С. М. Козела

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА

Problemas de Física

Dirigido por S.Kósel



Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
A. MOLINA GARCÍA

Impreso en la URSS

На испанском языке

- © Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1983
© traducción al español, editorial Mir, 1985

ÍNDICE

Prólogo	7	
	Problemas	Respuestas y soluciones
I. MECÁNICA	9	157
Cinemática	9	157
Estática	12	160
Dinámica	16	165
Trabajo. Potencia. Energía	24	172
Leyes de conservación de la energía y del impulso	28	175
Movimiento de rotación	34	180
Gravitación. Satélites	39	186
Aplicación de las leyes de la mecánica en la física nuclear	42	190
II. CALOR	43	191
Dilatación de los cuerpos	43	191
Ecuación de estado de los gases	44	193
Mezclas de gases	54	199
Hidroaerostática	57	202
Ley de conservación de la energía en los procesos térmicos	65	209
Vapores saturados y no saturados	73	216
Elementos de física molecular y atómica	80	221
III. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO	84	225
Electrostática	84	225
Ley de Ohm. Leyes de la electrólisis	90	231
Trabajo y potencia de la corriente eléctrica. Ley de Joule—Lenz	97	239
Elementos de característica no lineal en los circuitos de corriente continua	102	243
Partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético	107	247
Inducción electromagnética. Corriente alterna	115	251

	Problemas	Respuestas y soluciones
IV. ÓPTICA	122	257
Reflexión y refracción de la luz	122	257
Lentes delgadas	128	266
Espejos esféricos	135	276
Instrumentos ópticos	140	283
Fotometría	145	288
Elementos de óptica ondulatoria	152	297
Elementos de óptica cuántica. Efecto fotoeléctrico	155	301
ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS	303	

En este libro se han recogido más de 850 problemas de física del tipo de los que suelen ponerse en los exámenes de ingreso en el Instituto Físico-técnico de Moscú. Algunos de ellos (alrededor de 20) fueron propuestos en las Olimpiadas Escolares de física de las repúblicas y de toda la Unión Soviética. Los autores que han tomado parte en la redacción y selección de los problemas han revisado de nuevo todo este amplio material y lo han sistematizado.

Se ha procurado elegir problemas cuya resolución requiere no la simple sustitución mecánica de los datos iniciales en las fórmulas conocidas, sino ante todo la comprensión del fenómeno mismo que describen las condiciones del problema y el pleno dominio de las leyes físicas que se estudian en la escuela de enseñanza media. Esto, en nuestra opinión, debe contribuir no sólo a adquirir la costumbre de resolver problemas, sino también a asimilar más profundamente la teoría.

Se ha dado preferencia a aquellos problemas que más se aproximan a la práctica, nacidos bajo la influencia de los experimentos. En estos problemas no se consideran sistemas idealizados, sino objetos físicos reales. Una etapa importante en la resolución de estos problemas, característica de toda investigación científica, es la elección de un modelo físico determinado. Una serie de problemas incluidos en el libro tienen carácter valorativo. Su propósito es facilitar el desarrollo de la mentalidad física y la sensación de las escalas de las magnitudes y fenómenos físicos. Hay un pequeño número de problemas que, sin pretender ser originales, ofrecen interés físico general.

Para resolver los problemas aquí recopilados se requieren los conocimientos previstos en el programa de la escuela media o de segunda enseñanza. El nivel de complejidad de los problemas es diverso, pero abundan los difíciles de resolver. No obstante, también se incluyen problemas elementales de física.

En la parte «Respuestas y soluciones» se dan las soluciones de todos los problemas e indicaciones minuciosas para resolver la mayoría de ellos. Pero en una serie de casos los autores han creído conveniente limitarse a dar las respuestas definitivas. Estos problemas se han dejado así para que el alumno los resuelva por su cuenta. Al

hacer las indicaciones y dar las soluciones se ha prestado especial atención a las cuestiones esenciales, relacionadas con la aplicación de las leyes físicas a la resolución de problemas concretos. Los detalles secundarios, por lo general, se han omitido.

«Problemas de Física» se ofrece ante todo a los estudiantes que una vez terminada la segunda enseñanza desean prepararse individualmente para el ingreso en algún centro de enseñanza superior especializado en física. Puede utilizarse también como material didáctico en círculos de física, en las escuelas físico-matemáticas y para preparar participantes en las Olimpiadas Escolares de física. Asimismo puede ser de gran utilidad para los estudiantes de magisterio y para los profesores de física de las escuelas de enseñanza media.

S. M. Kósel

PROBLEMAS

I. MECÁNICA

Cinemática

1.1 Durante el último segundo de caída libre sin velocidad inicial, un cuerpo recorre las $3/4$ partes de todo su camino. ¿Cuánto tiempo tarda en caer el cuerpo?

1.2 Desde el punto A , situado en el extremo superior del diámetro vertical de cierta circunferencia (fig. 1.1.), por unos canales colocados a lo largo de distintas cuerdas de aquélla, empiezan a deslizarse simultáneamente varios cuerpos. ¿Al cabo de cuánto tiempo llegan estos cuerpos a la circunferencia? ¿Cómo depende el tiempo del ángulo de inclinación α de la cuerda respecto de la vertical? Despréciase el rozamiento.

1.3 Un cuerpo pequeño se desliza con la velocidad $v = 10$ m/s por un plano horizontal aproximándose a una ranura. La ranura está formada por dos paredes verticales paralelas, situadas entre sí a la distancia $d = 5$ cm. La velocidad v es perpendicular a las paredes. La profundidad de la ranura $H = 1$ m. ¿Cuántas veces chocará el cuerpo con las paredes antes de caer al fondo? Suponer que los choques con la pared son perfectamente elásticos.

1.4 Una bolita se mueve sin rozamiento una vez por el canal ABC y otra, por el ADC (fir. 1.2). Las partes de los canales AD y BC son verticales, y los ángulos ABC y ADC están redondeados. Representar gráficamente para ambos casos cómo depende la velocidad v de la bolita del tiempo t , si $AB = BC = AD = DC = h$. La velocidad de la bolita en el punto A es nula. ¿Por cuál de los caminos (ABC o ADC) llegará antes la bolita desde el punto A al punto C ?

1.5 Un torpedo es lanzado desde el punto A en el instante en que el barco enemigo se encuentra en el punto B y navega con la velocidad $v_1 = 50$ km/h dirigida formando el ángulo $\beta = 30^\circ$ con la línea AB (fig. 1.3). La velocidad del torpedo es $v_2 = 100$ km/h. ¿Bajo qué ángulo α hay que lanzarlo para que dé en el blanco?

1.6 En los puntos A y B se encuentran, respectivamente, una canoa automóvil y una lancha de motor que se mueven con las velocidades constantes v_c y v_l en las direcciones que indica la fig. 1.4.

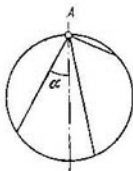


Fig. 1.1.

Determinar gráficamente cuál será la distancia mínima entre la canoa y la lancha.

1.7. La fig. 1.5 está sacada de la fotografía de los rastros de humo de dos locomotoras que se mueven en un tramo rectilíneo de

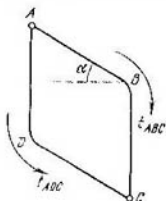


Fig. 1.2.



Fig. 1.3.

vía con las velocidades $v_1 = 50$ km/h y $v_2 = 70$ km/h (vistos desde arriba). Los sentidos en que marchan los trenes se indican con flechitas. Hallar la velocidad del viento.

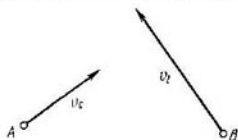


Fig. 1.4.

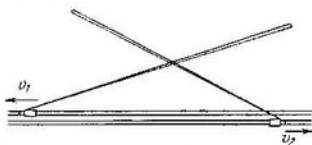


Fig. 1.5.

1.8. Un nadador salta desde un trampolín de 10 m de altura y se sumerge en el agua a la distancia $l = 3$ m, medida horizontalmente desde el borde del trampolín, al cabo del tiempo $t = 2$ s. Determinar la velocidad del deportista en el instante del salto.

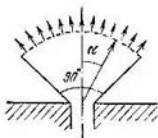


Fig. 1.6.

1.9. De tres tubos que se encuentran en el suelo salen con la misma velocidad sendos chorros de agua formando, respectivamente, ángulos de 60° , 45° y 30° con el horizonte. Hallar la relación entre las alturas máximas a que llegan los chorros de agua que salen de los tubos y la relación entre las distancias

a que cae el agua sobre la tierra.

1.10. En las instalaciones de lluvia artificial para riego de campos se utilizan boquillas esféricas con gran número de agujeros iguales por los cuales sale el agua a la velocidad v (fig. 1.6) ¿Cómo debe depender del ángulo α el número de agujeros correspondiente a la unidad de superficie, para que el campo que hay alrededor de la

boquilla se riegue uniformemente? Considerar que la boquilla está al nivel de la tierra y que sus dimensiones son pequeñas en comparación con las del círculo que riega. El ángulo de abertura del cono de la boquilla es igual a 90° .

1.11. En un río, a la distancia $L = 90$ m de la orilla, está anclada una balsa. La velocidad de la corriente del río junto a la orilla es $u_0 = 0$ y crece proporcionalmente a la distancia de ella de manera que junto a la balsa es $u_L = 2$ m/s. Una canoa automóvil se dirige desde la orilla hacia la balsa. Respecto del agua la canoa desarrolla la velocidad $v = 7,2$ km/h. ¿Cómo debe el motorista orientar la canoa al desatracar, para que, sin tener que corregir después la velocidad, ésta atraque a la balsa exactamente enfrente del punto de partida? ¿Qué tiempo T tardará la canoa en recorrer el camino en estas condiciones?

1.12. Un avión vuela horizontalmente a la altura $H = 4$ km sobre la superficie de la tierra, a velocidad supersónica. El ruido llega al observador al cabo del tiempo $t = 10$ s de haber pasado el avión sobre él. Determinar la velocidad v del avión. La velocidad del sonido $c = 330$ m/s.

1.13. Un avión vuela de modo horizontal a velocidad $v = 470$ m/s. Un observador oye el ruido al cabo del tiempo $t = 21$ s de haber pasado el avión sobre él. ¿A qué altura vuela el avión? La velocidad del sonido $c = 330$ m/s.

1.14. Un disco liso de radio R , cuyo plano es horizontal, gira alrededor de su eje con la frecuencia $n = 4$ r.p.m. De la superficie

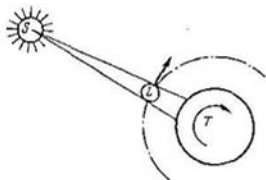


Fig. 1.7.

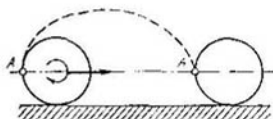


Fig. 1.8.

del disco, a la distancia $R/2$ del eje, se desprende un cuerpo pequeño que se desliza sin rozamiento por el disco. ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá despedido del disco?

1.15. Un cilindro de radio $R = 20$ cm gira alrededor de su eje con la frecuencia $n = 20$ r.p.m. A lo largo de la generatriz del cilindro se mueve un cuerpo con la velocidad constante $v = 30$ cm/s respecto de la superficie del cilindro. Determinar la velocidad total y la aceleración de dicho cuerpo.

1.16. Determinar la velocidad con que se mueve la sombra de la Luna por la superficie de la Tierra durante un eclipse total de Sol,

sin tener en cuenta la corrección debida al movimiento orbital de la Tierra. Para simplificar supóngase que el eclipse se observa en el ecuador a mediodía y que el eje de la Tierra es perpendicular al plano de la órbita lunar. El sentido de la rotación de la Tierra alrededor de su eje y el del movimiento de la Luna por su órbita coinciden (fig. 1.7). La distancia entre la Tierra y la Luna $r = 3,8 \cdot 10^5$ km, el radio de la Tierra $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km. El mes lunar considérese igual a 28 días terrestres. Al hacer los cálculos téngase en cuenta que la distancia de la Tierra al Sol es mucho mayor que la de la Tierra a la Luna.

1.17. Una rueda de radio R rueda uniformemente por una superficie horizontal. Del punto A de la rueda se desprende una gota de barro (fig. 1.8). ¿Con qué velocidad v se mueve la rueda, si la gota, después de estar en el aire, vuelve a caer sobre el mismo punto de la rueda? La resistencia del aire no se toma en consideración.

Estática

1.18. Una esfera suspendida de un hilo se apoya en la pared como muestra la fig. 1.9. El centro de la esfera C se encuentra en la misma vertical que el punto de suspensión O ; el hilo forma con la vertical el ángulo α , y el radio trazado por el punto de sujeción del hilo A , el ángulo β . ¿Con qué coeficiente de rozamiento de la esfera con la pared es posible este equilibrio? Suponer que $\alpha + \beta = \pi/2$.

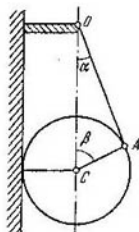


Fig. 1.9.

1.19. Una escalera de mano, cuya longitud $l = 3$ m, está apoyada con su extremo superior redondeado en una pared lisa y con el inferior en el suelo. El ángulo de inclinación de la escalera con el horizonte es $\alpha = 60^\circ$ y su masa $m = 15$ kg. En la escalera, a la distancia $a = 1$ m de su extremo superior, está de pie un hombre de masa $M = 60$ kg. ¿Con qué fuerza presiona sobre el suelo el extremo inferior de la escalera y cómo está dirigida esta fuerza?

1.20. Una barra de masa m y longitud l está sujeta a charnela por su extremo inferior (fig. 1.10). Al extremo superior de la barra está atado un hilo que pasa por una polea, la cual se encuentra en la misma vertical que la charnela y a la altura H de ésta. ¿Qué carga mínima hay que colgar en el otro extremo del hilo para que la barra se mantenga con estabilidad en posición vertical?

1.21. Un muelle une entre sí dos cuerpos cuyas masas respectivas son m y M . Cuando este sistema se suspende por el cuerpo superior (fig. 1.11, a), la longitud del muelle es igual a l_1 . Si el sistema se coloca sobre un soporte (fig. 1.11, b), la longitud del muelle será igual a l_2 . Determinar la longitud l_0 del muelle no sometido a esfuerzos.

1.22. ¿Bajo qué ángulo α es más fácil tirar de la cuerda al arras-

trar un cuerpo pesado por un plano horizontal (fig. 1.12, a)? Se sabe que el cuerpo empieza a deslizarse espontáneamente por un plano inclinado cuando el ángulo de inclinación es igual a φ (fig. 1.12, b).

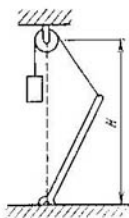


Fig. 1.10.

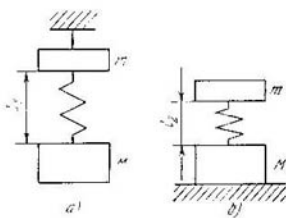


Fig. 1.11.

1.23. ¿Qué fuerza horizontal mínima F hay que aplicar a un cuerpo de masa $m = 1$ kg (fig. 1.13) que se encuentra sobre un plano inclinado, cuyo ángulo de inclinación $\alpha = 30^\circ$, para que dicho cuer-

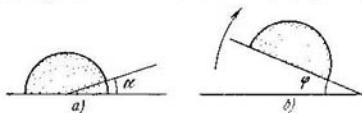


Fig. 1.12.

po esté en reposo? El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano inclinado es $k = 0,2$.

1.24. ¿Qué fuerza horizontal mínima F hay que aplicar a un cuerpo de masa $m = 2$ kg (fig. 1.13) que se encuentra sobre un plan

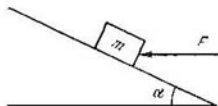


Fig. 1.13.

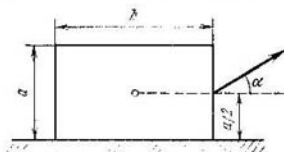


Fig. 1.14.

inclinado, cuyo ángulo de inclinación $\alpha = 30^\circ$, para que dicho cuerpo se mueva uniformemente hacia arriba por el plano inclinado? El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano inclinado es $k = 0,3$.

1.25. De un cuerpo, cuyas dimensiones son $a \times b$ (fig. 1.14), situado sobre un plano horizontal, tiran uniformemente con una cuer-

da cuyo ángulo de inclinación α puede variarse. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano es igual a k . ¿Para qué ángulo α empezará a levantarse el cuerpo?

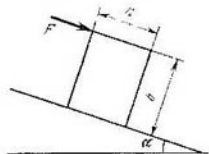


Fig. 1.15.

1.26. Un cuerpo de masa m y dimensiones $a \times b$ (fig. 1.15) se encuentra sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es α . Sobre el cuerpo comienza a actuar una fuerza F paralela al plano inclinado. ¿Qué fuerza F será necesaria para que el cuerpo se vuelque? Se sabe que en este caso el cuerpo no se deslizará por el plano inclinado.

1.27. Un pequeño cubo de masa $m = 100$ g descansa sobre un plano rugoso, inclinado respecto del horizonte bajo un ángulo $\alpha = 30^\circ$ (fig. 1.16). El coeficiente de rozamiento del cubo con el plano $k =$

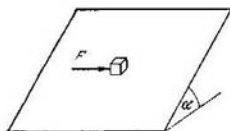


Fig. 1.16.

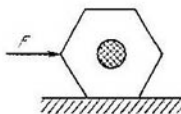


Fig. 1.17.

$= 0,8$. Determinar la fuerza horizontal mínima F con que hay que empujar el cubo para que empiece a moverse. La fuerza se encuentra en el plano de inclinación.

1.28. Un lapicero hexagonal se empuja a lo largo de un plano horizontal como muestra la fig. 1.17. ¿Para qué coeficiente de rozamiento k entre el lápiz y el plano se desplazará aquél por éste sin rodar?

1.29. Un automóvil de masa $M = 1$ t sube a velocidad uniforme por un trozo de carretera en cuesta cuyo ángulo de inclinación $\alpha = 12^\circ$. ¿Qué diferencia hay entre las fuerzas con que presionan sobre la carretera las ruedas delanteras y las traseras del automóvil, si la distancia entre los ejes $L = 2,5$ m y el centro de masas equidista de dichos ejes y se encuentra a la altura $H = 0,75$ m.

1.30. Un camión de masa $M = 8$ t sube una cuesta empinada (fig. 1.18). A él va enganchado un remolque de masa $m = 4$ t. El cable de remolque se encuentra a la altura $h = 1$ m. El centro de masas C del camión está a la altura $H = 2$ m; la distancia entre los ejes de las ruedas delanteras y traseras del camión es $L = 4$ m. Cuando marcha por una carretera horizontal, sobre las ruedas traseras recaen las $3/4$ partes de la fuerza de gravedad del camión. ¿Con qué ángulo de pendiente α se volcará el camión hacia atrás? ¿Existe

realmente ese peligro si la potencia del motor sólo es suficiente para subir cuestas con ángulos de pendiente de no más de 10° ?

1.31. ¿Cómo varía la fuerza con que presionan las ruedas delanteras de un automóvil de masa $m = 1500$ kg que marcha por una carretera horizontal (con coeficiente de rozamiento $k = 0,4$), si

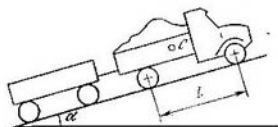


Fig. 1.18.

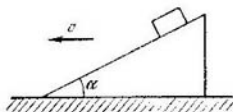


Fig. 1.19.

las ruedas traseras se frenan todo lo posible sin que llegue a producirse deslizamiento? El centro de masas del automóvil equidista de las ruedas y se encuentra del suelo a la altura $h = 60$ cm; la distancia entre las ruedas delanteras y traseras $d = 3,5$ m.

1.32. Un prisma con ángulo de inclinación α se mueve con la aceleración a por una mesa horizontal lisa (fig. 1.19). ¿Qué acelera-

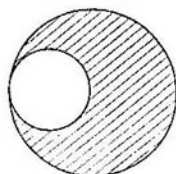


Fig. 1.20.

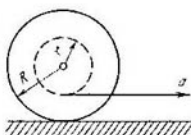


Fig. 1.21.

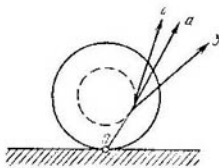


Fig. 1.22.

ción a debe tener dicho prisma para que el cuerpo que hay sobre él empiece a subir? El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el prisma es igual a k .

1.33. Una placa homogénea delgada tiene forma de círculo con radio R , en el cual se ha recortado un agujero de radio dos veces menor, tangente al borde de la placa (fig. 1.20). ¿Dónde se encuentra el centro de masas de dicha placa?

1.34. Cuando del hilo de un carrito que está en el suelo se tira como indica la fig. 1.21. la aceleración de aquél es constante e igual a a . ¿Para qué coeficiente de rozamiento entre los bordes del carrito y el suelo se deslizará el carrito sin girar? Los radios de los bordes del carrito y de su eje son, respectivamente, R y r .

1.35. ¿En qué sentido rodará un carrito si se tira del hilo bajo ángulos diferentes (fig. 1.22)? Considerar los casos siguientes: a) la dirección del hilo pasa por el punto O (punto de contacto del carrito con la mesa); b) el ángulo de inclinación del hilo es menor que en el

caso a); c) el ángulo de inclinación del hilo es mayor que en el caso a). En ninguno de estos casos se desliza el carrito.

1.36. En un cilindro, a la distancia $2R/3$ de su centro, paralelamente al eje, se ha taladrado un orificio de radio igual a $R/4$ (fig. 1.23). El orificio se ha llenado con una substancia cuya densidad es 11 veces mayor que la del cilindro. Este descansa sobre una tabla que se va

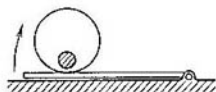


Fig. 1.23.

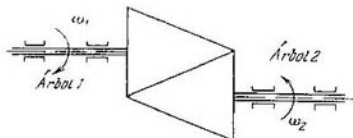


Fig. 1.24.

levantando lentamente por uno de sus extremos. ¿Cuál será el ángulo de inclinación máximo α de la tabla con el cual el cilindro se pueda aún mantener en equilibrio sobre ella? El coeficiente de rozamiento entre el cilindro y la tabla es $k = 0,3$.

1.37. La rotación del árbol 1 se comunica al árbol 2 en virtud de las fuerzas de rozamiento que se desarrollan en una transmisión por fricción, consistente en dos conos iguales apretados entre sí uniformemente por la generatriz (fig. 1.24). Hallar la velocidad angular ω_2 del árbol 2 sin carga, si la velocidad angular del árbol 1 es igual a ω_1 .

Dinámica

1.38. Tres cuerpos de igual masa $M = 5$ kg se encuentran sobre una mesa horizontal. Dichos cuerpos están unidos entre sí por medio de hilos que se rompen cuando la fuerza de tracción $T = 20$ N. Los coeficientes de rozamiento entre los cuerpos y la mesa son: $k_1 = 0,3$, $k_2 = 0,2$ y $k_3 = 0,1$. Al cuerpo 3 se aplica la fuerza F que se va aumentando lentamente. ¿Cuál de los hilos que unen los cuerpos se romperá y con qué fuerza mínima $F_{\min}$ ocurrirá esto? ¿Cómo cambiará la respuesta si la fuerza F se aplica al cuerpo 1?

1.39. De un cuerpo de masa $m_1 = 7$ kg se cuelga con una cuerda otro cuerpo de masa $m_2 = 5$ kg. La masa de la cuerda $m = 4$ kg. Al cuerpo m_1 se aplica una fuerza $F = 188,8$ N dirigida hacia arriba. Hallar la fuerza de tensión de la cuerda en su extremo superior y en su centro.

1.40. Dos cuerpos, cuyas masas son $m_1 = 300$ g y $m_2 = 200$ g, están unidos entre sí por medio de un hilo que pasa por una polea, la cual está colgada de una balanza de resorte. Determinar la aceleración de los cuerpos, la indicación de la balanza y la tensión del hilo. El rozamiento en el eje de la polea y la masa de ésta se desprecian.

1.41. En una barra vertical está sujeta una polea fija, cuyo peso se desprecia, que soporta un hilo del que penden dos cuerpos cuyas masas son $m_1 = 500$ g y $m_2 = 100$ g. El cuerpo m_2 tiene un agujero a través del cual pasa la barra (fig. 1.25). La fuerza de rozamiento entre el cuerpo m_2 y la barra es constante e igual a $F_r = 13$ N. Hallar la aceleración a de los cuerpos y la fuerza de tensión T del hilo.

1.42. Suponiendo que las masas m_1 y m_2 de los cuerpos son conocidas, hallar las aceleraciones a_1 y a_2 en un sistema consistente en

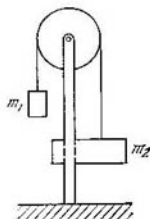


Fig. 1.25.

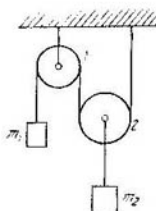


Fig. 1.26.

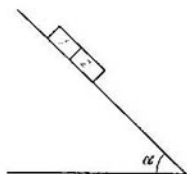


Fig. 1.27.

una polea fija 1 y otra polea móvil 2 (fig. 1.26). Las masas de las poleas y el rozamiento en sus ejes se desprecian.

1.43. Por una polea fija, cuya masa se desprecia, pasa una cuerda carente de peso. De uno de sus cabos pende un cuerpo de masa $M = 25$ kg y al otro cabo se ha cogido un mono y trepa por él. ¿Con qué aceleración a trepa el mono, si el cuerpo permanece durante todo el tiempo a la misma altura? La masa del mono es $m = 20$ kg. ¿Al cabo de cuánto tiempo t llegará el mono a la polea, si inicialmente se encontraba de ella a la distancia $l = 20$ m?

1.44. Dos cuerpos de igual masa $m = 0,2$ kg se colocan sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación $\alpha = 45^\circ$ (fig. 1.27). El coeficiente de rozamiento del cuerpo superior con el plano es $k_1 = 0,01$, y el del cuerpo inferior, $k_2 = 1$. Determinar la fuerza de interacción de los cuerpos al deslizarse juntos por el plano inclinado.

1.45. Sobre una mesa horizontal lisa descansa un prisma de masa M , con ángulo de inclinación α , y sobre él hay otro prisma de masa m (fig. 1.28). Sobre el prisma menor actúa una fuerza horizontal F ; en estas condiciones ambos prismas se mueven a lo largo de la mesa como si fueran un todo único (es decir, sin que varíe su disposición mutua). Determinar la fuerza de rozamiento entre los prismas.

1.46. ¿Cuánto tiempo t tardará un cuerpo de masa m en deslizarse hasta la base de un plano inclinado de altura h y ángulo de inclinación β , si por otro plano inclinado con ángulo de inclinación α ese mismo cuerpo se desliza hacia abajo con movimiento uniforme?

1.47. ¿A qué debe ser igual el coeficiente mínimo de rozamiento k entre las cubiertas de las ruedas y la superficie de una carretera en cuesta, con ángulo de inclinación $\alpha = 30^\circ$, para que un automóvil pueda subir por ella con la aceleración $a = 0,6 \text{ m/s}^2$?

1.48. Sobre una mesa horizontal lisa descansa un cuerpo de masa $M = 2 \text{ kg}$, sobre el cual se encuentra otro cuerpo de masa $m = 1 \text{ kg}$ (fig. 1.29). Ambos cuerpos están unidos entre sí por medio de un hilo que pasa por una polea de peso despreciable. ¿Qué fuerza F hay que aplicar al cuerpo inferior para que empiece a moverse

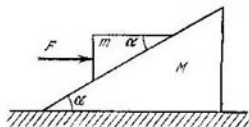


Fig. 1.28.

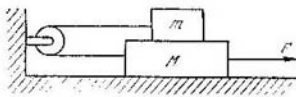


Fig. 1.29.

alejándose de la polea con la aceleración constante $a = g/2$? El coeficiente de rozamiento entre los cuerpos es $k = 0,5$. El rozamiento entre el cuerpo inferior y la mesa es despreciable.

1.49. Sobre un plano inclinado, con ángulo de inclinación $\alpha = 30^\circ$, se coloca una plancha plana de masa $m_2 = 10 \text{ kg}$ y sobre

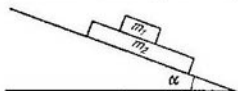


Fig. 1.30.

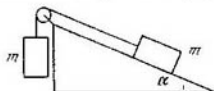


Fig. 1.31.

ella un cuerpo de masa $m_1 = 5 \text{ kg}$ (fig. 1.30). El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la plancha es $k_1 = 0,15$, y entre la plancha y el plano, $k_2 = 0,3$. Determinar las aceleraciones de ambos cuerpos. ¿Con qué coeficiente de rozamiento k_2 la plancha no se moverá?

1.50. Por una polea sujeta al vértice superior de un plano inclinado pasa una cuerda con dos pesas de masas m iguales (fig. 1.31). Hallar la fuerza que presiona sobre el eje de la polea si el coeficiente de rozamiento entre el plano inclinado y la pesa que descansa sobre él es igual a k y el ángulo de inclinación del plano es α . El rozamiento en el eje de la polea y la masa de ésta se pueden despreciar.

1.51. Un hombre se desliza sobre un trineo por una pendiente que forma con el horizonte un ángulo α de 30° . La masa M del hombre es dos veces mayor que la masa m del trineo. El coeficiente de rozamiento del trineo con la superficie de la pendiente es $k = 0,3$. ¿Cómo debe moverse el hombre respecto del trineo para que este último se deslice por la pendiente con movimiento uniforme?

1.52. Un hombre se desliza sobre un trineo por una pendiente que forma con el horizonte un ángulo de 6° . La masa del trineo M es dos veces mayor que la masa m del hombre. El coeficiente de rozamiento del trineo con la superficie de la pendiente es $k = 0,2$. ¿Cómo debe moverse el hombre respecto del trineo para que este último se deslice por la pendiente con movimiento uniforme?

1.53. Una tabla horizontal tiene un escalón, cuya altura es H , en el cual se apoya un cilindro homogéneo de radio $R > H$ que

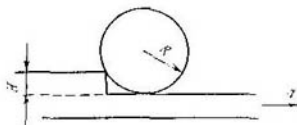


Fig. 1.32.

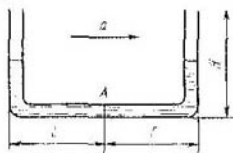


Fig. 1.33

descansa libremente sobre la tabla (fig. 1.32). La tabla se mueve en dirección horizontal con la aceleración a . Determinar la aceleración máxima posible con la cual el cilindro aún no subirá el escalón. El rozamiento se desprecia.

1.54. Un tubo en forma de U , cuyas dimensiones se indican en la fig. 1.33, está lleno de mercurio hasta la mitad de sus partes verticales. El tubo se mueve horizontalmente con la aceleración a . Hallar la diferencia de alturas h del mercurio en las partes verticales del tubo y la presión en la sección A . ¿Con qué aceleración empezará el mercurio a salirse del tubo? La presión atmosférica es igual a P_0 y la densidad del mercurio igual a ρ .

1.55. Un tren, que va llegando a una estación con la velocidad $v = 72$ km/h, empieza a frenar uniformemente. ¿Cuál será el tiempo mínimo de frenado, hasta que el tren se pare totalmente, que garantice la seguridad de los viajeros que duermen (es decir, que no se caigan de sus literas)? El coeficiente de rozamiento con las literas es $k = 0,2$.

1.56. La longitud de la carrera de despegue de un avión es $L = 1$ km y la velocidad de éste al despegar, $v = 200$ km/h. ¿Qué sobrecarga sufre el pasajero en este avión, si el embalamiento se produce uniformemente?

1.57. Un automóvil de masa $m = 2 \cdot 10^3$ kg se mueve con la velocidad $v = 90$ km/h. En el instante $t = 0$ empieza a actuar sobre él una fuerza horizontal de frenado F que aumenta con el tiempo según una ley lineal (fig. 1.34). ¿Al cabo de cuánto tiempo se parará el automóvil?

1.58. ¿Qué velocidad puede comunicar un futbolista al balón al darle una patada si la fuerza máxima con que puede actuar sobre él es $F_{\text{máx}} = 3,5 \cdot 10^3$ N y la duración del puntapie $t_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ s?

Suponer que durante el golpe la fuerza aumenta y disminuye según una ley lineal (fig. 1.35). La masa del balón $m = 0,5$ kg.

1.59. En un descenso directo un esquiador se desliza por una pendiente, cuyo ángulo de inclinación $\varphi = 45^\circ$, sin impulsarse con los bastones. El coeficiente de rozamiento de los esquís con la nieve es $k = 0,1$. La fuerza de la resistencia del aire es proporcional al

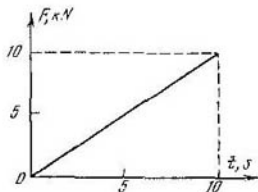


Fig. 1.34.

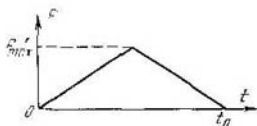


Fig. 1.35.

cuadrado de la velocidad: $F = \alpha v^2$, donde la magnitud constante $\alpha = 0,7$ kg/m. ¿Qué velocidad máxima puede desarrollar el esquiador si su masa $m = 90$ kg?

1.60. Un paracaidista de masa $m_1 = 80$ kg desciende, con el paracaídas abierto, a una velocidad estacionaria $v_1 = 5$ m/s. ¿Cuál sería la velocidad estacionaria si en ese mismo paracaídas descendiera un niño de masa $m_2 = 40$ kg? La fuerza de resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

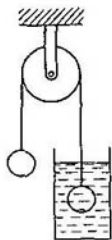


Fig. 1.36.

1.61. Dos bolitas iguales están unidas entre sí por un hilo sin peso, que pasa por una polea que tampoco pesa, y una de ellas se sumerge en un recipiente con líquido (fig. 1.36). ¿Con qué velocidad estacionaria v se moverán las bolitas si se sabe que la velocidad estacionaria de caída de una bolita independiente en el mismo líquido es igual a v_0 ? La fuerza de resistencia del líquido es proporcional a la velocidad. La densidad del líquido es ρ_1 y la del material de las bolitas, ρ .

1.62. De un tren que marcha por un tramo horizontal de vía con la velocidad constante v_0 se desengancha $1/3$ parte de los vagones que lo componen. Al cabo de cierto tiempo la velocidad de los vagones desenganchados se reduce a la mitad. Suponiendo que la fuerza de tracción no varía al cortarse el tren, determinar la velocidad de su parte delantera en el instante del corte. La fuerza de rozamiento es proporcional a la gravedad y no depende de la velocidad.

1.63. Una pesa de masa $M = 10$ kg está atada al extremo, pendiente libremente, de una cuerda arrollada a un torno. Tanto la pesa

como el torno están a cierta altura. La pesa empieza a caer y la cuerda se tensa cuando aquella desciende una distancia $h = 12$ m. Después de esto se comienza a frenar por medio del torno el movimiento de la pesa. ¿Qué longitud mínima l de cuerda habrá que soltar hasta que la pesa se detenga totalmente, si la fuerza de tensión que aguanta la cuerda es $T = 180$ N?

1.64. Un aparato que sirve para estudiar las leyes del movimiento uniformemente acelerado consta de dos pesas, de masas iguales $M = 100$ g, sujetas entre sí por un hilo inextensible que pasa por una polea fija (fig. 1.37). En el instante inicial la pesa de la izquierda toca el suelo y la de la derecha está a la altura $H = 5$ m sobre éste. Encima de la pesa de la derecha se coloca una sobrecarga de masa $m = 10$ g y el sistema empieza a moverse. Cuando la pesa de la derecha se encuentra a la altura $h = 4$ m sobre el suelo, la sobrecarga m se engancha en un soporte fijo y se queda en él. ¿Al cabo de cuánto tiempo, desde que comenzó a moverse, llegará al suelo la pesa de la derecha?

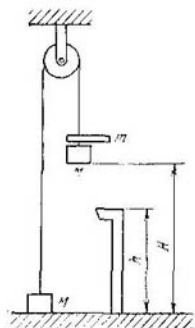


Fig. 1.37.

1.65. Un futbolista da una patada al balón con la fuerza media $F = 5 \cdot 10^2$ N. El balón, después de recibir el golpe, sale lanzado bajo un ángulo de 45° con el horizonte y vuelve a tocar tierra a la

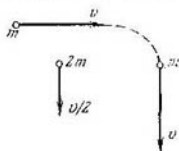


Fig. 1.38.

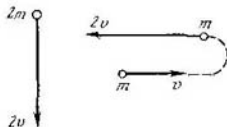


Fig. 1.39.

distancia $L = 40$ m. Determinar el tiempo que duró el golpe dado al balón. La resistencia del aire despréciase. La masa del balón es $m = 0,5$ kg.

1.66. Sobre dos partículas, una de las cuales tiene la masa m y la velocidad v y la otra, la masa $2m$ y la velocidad $v/2$ perpendicular a la de la primera (fig. 1.38), actúan durante cierto tiempo fuerzas de igual módulo y dirección. En el instante en que dichas fuerzas dejan de actuar, la primera partícula empieza a moverse con la velocidad v en dirección perpendicular a la inicial. ¿Con qué velocidad se moverá en este caso la segunda partícula?

1.67. Sobre dos partículas, una de masa m y velocidad v y otra de masa $2m$ y velocidad $2v$ perpendicular a la de la primera (fig. 1.39), actúan durante cierto tiempo fuerzas de igual módulo y dirección. En el instante en que las fuerzas dejan de actuar, la primera partícula empieza a moverse en sentido contrario con la velocidad $2v$. ¿Con qué velocidad se moverá en este caso la segunda partícula?

1.68. Una lancha de propulsión por chorro se mueve con velocidad constante tomando agua de fuera de bordo y lanzándola hacia atrás en forma de chorro con la velocidad $u = 20$ m/s respecto de la lancha. El área de la sección transversal del chorro es $S = 0,01$ m². Hallar la velocidad de la lancha si la fuerza de resistencia que actúa sobre ella es proporcional al cuadrado de la velocidad: $F = kv^2$, siendo $k = 7,5$ N·s²/m².

1.69. Una lancha de propulsión por chorro toma agua de fuera de bordo y la lanza hacia atrás en forma de chorro con la velocidad u respecto de la lancha. En estas condiciones la lancha se mueve con la velocidad v_0 . A esta lancha se engancha, por medio de un cable de remolque largo, otra embarcación cuya resistencia, cuando su velocidad es la misma que la de la lancha, es igual a la fuerza de resistencia de ésta. Determinar la velocidad de la embarcación remolcada si se sabe que las fuerzas de resistencia para la lancha y el remolque varían proporcionalmente a sus velocidades.

1.70. El motor de un avión reactor, que vuela con la velocidad $v = 720$ km/h, absorbe en la unidad de tiempo una masa de aire $M_t = 100$ kg/s, consume una masa de combustible $m_t = 4$ kg/s y lanza una masa de productos de combustión $M_t + m_t = 104$ kg/s con la velocidad $u = 500$ m/s respecto del avión. Determinar la fuerza de tracción del motor.

1.71. Una nave espacial se mueve con la velocidad v en un flujo de partículas meteoríticas al encuentro de él. Después la nave gira y empieza a moverse con la velocidad v en el mismo sentido que el flujo de partículas. Al mismo tiempo la fuerza de tracción del motor se hizo cuatro veces menor. ¿A qué es igual la velocidad de las partículas meteoríticas? Suponer que la nave tiene forma cilíndrica con los extremos planos y que los choques de las partículas con el revestimiento son perfectamente elásticos.

1.72. Sobre un recipiente ancho se abre, a la altura $h = 2$ m, un grifo por el cual, durante un tiempo $t_0 = 2$ s, sale hacia abajo en la unidad de tiempo una masa de agua $m_t = 0,2$ kg/s. El área del orificio del grifo es $S = 1$ cm². Hallar cómo varía la fuerza con que presiona el recipiente sobre su soporte y representar gráficamente esta fuerza en función del tiempo.

1.73. Un extintor lanza en la unidad de tiempo una masa de espuma $m_t = 0,2$ kg/g con la velocidad $v = 20$ m/s. La masa del extintor lleno es $M = 2$ kg. ¿Qué fuerza hay que hacer para mantener el extintor inmóvil en posición vertical en el instante en que empieza a funcionar?

1.74. Un cilindro de diámetro D está lleno de agua y colocado

horizontalmente (fig. 1.40). ¿Con qué velocidad se desplazará el émbolo si sobre él actúa una fuerza F y del orificio que hay en la pared posterior sale un chorro de diámetro d ? Despréciese el rozamiento y omítase la fuerza de gravedad.

1.75. Un peso pende de un hilo elástico. Si a dicho peso se aplica una fuerza que vaya aumentando lentamente desde el valor cero,



Fig. 1.40.

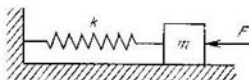


Fig. 1.41.

el hilo se rompe cuando ésta alcanza el valor F_1 . ¿Con qué fuerza mínima se romperá el hilo si la fuerza aplicada adquiere instantáneamente cierto valor y luego permanece constante?

1.76. Sobre un cuerpo en reposo de masa $m = 1$ kg, que descansa sobre una mesa horizontal y está sujeto a la pared por medio de un

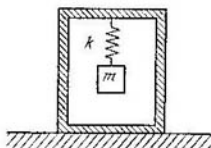


Fig. 1.42.

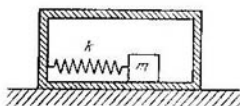


Fig. 1.43.

muelle cuya rigidez es $k = 9 \cdot 10^2$ N/m, comienza a actuar una fuerza horizontal constante F (fig. 1.41). Al cabo de un tiempo t la acción de la fuerza cesa. ¿Para qué tiempo t_1 será máxima la velocidad del cuerpo en el instante en que la fuerza deja de actuar? ¿Para qué tiempo t_2 permanecerá inmóvil el cuerpo?

1.77. Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. De la caja, por medio de un muelle de rigidez k , está suspendida una pesa de masa m (fig. 1.42). ¿Con qué amplitud de las oscilaciones de la pesa m empezará la caja a saltar sobre la mesa?

1.78. Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la caja y la mesa es igual a μ . Dentro de la caja descansa un cuerpo de masa m que puede moverse sin rozamiento por el fondo de la caja. Este cuerpo está sujeto a la pared por medio de un muelle cuya rigidez es k (fig. 1.43). ¿Con qué amplitud de las oscilaciones del cuerpo comenzará la caja a moverse por la mesa?

1.79. Dos muelles, cuyas rigideces son k_1 y k_2 , están sujetos por un extremo a una pared vertical y por el otro a un cuerpo de masa m

que descansa sobre una mesa horizontal (fig. 1.44). En el instante inicial el muelle k_1 se estira una longitud l_1 y el muelle k_2 se comprime una longitud l_2 , después de lo cual se suelta el cuerpo m . Hallar la amplitud y el período de las oscilaciones del cuerpo. El rozamiento se desprecia.

1.80. Un cuerpo de masa m puede desplazarse a lo largo de un eje horizontal OO' entre dos paredes verticales (fig. 1.45). A ambos

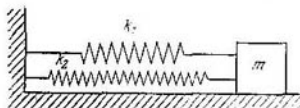


Fig. 1.44.

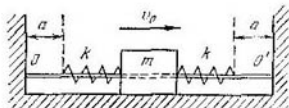


Fig. 1.45.

lados del cuerpo están sujetos sendos muelles sin peso de igual rigidez k . Si el cuerpo está situado simétricamente entre las paredes, las distancias desde los extremos libres de los muelles hasta las paredes

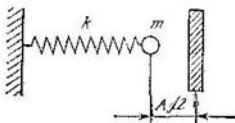


Fig. 1.46.

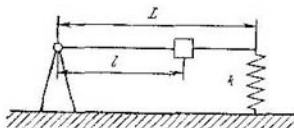


Fig. 1.47.

respectivas serán iguales a a . Si al cuerpo se comunica la velocidad v empieza a oscilar entre las paredes. ¿Qué período tendrán estas oscilaciones? Despréciase el rozamiento.

1.81. Una bolita de masa m , sujeta a un muelle cuya rigidez es k , realiza oscilaciones armónicas de amplitud A . A la distancia $A/2$ de la posición de equilibrio se coloca una plancha de acero de gran masa, en la cual bota la bolita (fig. 1.46). El choque de la bolita con la plancha es perfectamente elástico. Hallar el período de las oscilaciones en este caso.

1.82. Una barra sin peso de longitud L está sujeta a una charnela ideal por uno de sus extremos y por el otro se apoya en un muelle de rigidez k (fig. 1.47). Determinar el período de las pequeñas oscilaciones de la barra en dependencia de la posición l que ocupe en ella una pesa de masa m .

Trabajo. Potencia. Energía

1.83. Después de un accidente automovilístico el inspector del servicio de tráfico determina que la longitud de la huella dejada sobre el asfalto de la carretera por el automóvil al frenar es $L=60$ m.

¿A qué velocidad iba el automóvil, si el coeficiente de rozamiento de las ruedas con el asfalto es $k = 0,5$?

1.84. ¿Qué camino recorrerá un trineo por una superficie horizontal después de descender una pendiente de altura $H = 15$ m y ángulo de inclinación $\alpha = 30^\circ$? El coeficiente de rozamiento del trineo con la superficie es $k = 0,2$.

1.85. Un cuerpo sin velocidad inicial se desliza en una hondonada de paredes lisas que pasan suavemente al fondo horizontal (fig. 1.48). La longitud del fondo de la hondonada es $l = 2$ m. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el fondo es $k = 0,3$. La profundidad de la hondonada $H = 5$ m. ¿A qué distancia del centro de dicha hondonada se detendrá el cuerpo?

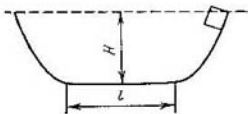


Fig. 1.48.

1.86. ¿Qué trabajo hay que realizar para subir un trineo cargado (cuya masa total es $m = 30$ kg) a un montículo cuya altura es $H = 10$ m? El ángulo de inclinación de la pendiente es $\alpha = 30^\circ$. El coeficiente de rozamiento entre el trineo y el montículo disminuye linealmente a lo largo del camino desde $k_1 = 0,5$ en la base, hasta $k_2 = 0,1$ en la cumbre.

1.87. Funcionando con potencia constante una locomotora puede arrastrar un tren hacia arriba, por una pendiente cuyo ángulo de inclinación es $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ rad, con la velocidad $v_1 = 50$ km/h. Para un ángulo de inclinación $\alpha_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ rad, en las mismas condiciones, el tren desarrolla la velocidad $v_2 = 60$ km/h. Determinar el coeficiente de rozamiento suponiendo que es igual en ambos casos.

1.88. Descendiendo por una cuesta, cuyo ángulo de inclinación $\alpha = 6^\circ$, un automóvil de masa $m = 1000$ kg se embala, teniendo desembragada la transmisión, hasta la velocidad máxima $v = 72$ km/h, después de lo cual su movimiento se hace uniforme. ¿Qué potencia desarrollará el motor del automóvil al subir con la misma velocidad esta misma cuesta?

1.89. Un automóvil de turismo, cuya masa $M = 1000$ kg, marcha con movimiento uniforme por un tramo de carretera en cuesta que se eleva una altura $h = 10$ m por cada kilómetro de recorrido. ¿Cuánto mayor será el gasto de combustible en este caso que cuando el automóvil se mueve con la misma velocidad por un tramo de carretera horizontal? El poder calorífico específico de la gasolina es $q = 4,6 \cdot 10^7$ J/kg. El rendimiento del motor $\eta = 10\%$. El gasto de combustible refiérase al recorrido $l = 100$ km.

1.90. ¿A qué es igual la fuerza media de la resistencia que opone el agua al movimiento de un barco, si éste consume en tres días $M = 6,5$ t de carbón navegando a la velocidad media $v = 10$ km/h? El rendimiento del motor del barco es $\eta = 0,1$. El poder calorífico específico de combustión del carbón $q = 33,5 \cdot 10^6$ J/kg.

1.91. En una gran ciudad un automóvil se ve obligado a pararse

con frecuencia ante los semáforos. Por ejemplo, en Moscú, un taxi tiene que pararse 100 veces cada 100 km de recorrido. Supongamos que después de cada parada el taxi desarrolla la velocidad $v = 60$ km/h. La fuerza de resistencia al movimiento del automóvil es $F = 300$ N y depende poco de la velocidad. ¿Cuántas veces mayor será el gasto de gasolina en Moscú que en un viaje por las afueras de la ciudad, durante el cual prácticamente no tiene que pararse? La masa del taxi es $M = 1,5$ t. El rendimiento del motor no depende de la velocidad.

1.92. Un tren marcha con la velocidad $v = 72$ km/h por un tramo horizontal de vía. ¿Cuanto deberá aumentar la potencia que desarrolla la locomotora para que el tren marche a la misma velocidad mientras llueve intensamente? Suponga que la masa de agua que cae sobre el tren en la unidad de tiempo, y que después escurre por las paredes de los vagones, es $m_t = 100$ kg/s. Desprecie la variación, debida a la lluvia, de la fuerza de rozamiento.

1.93. El golpe de un martinete, de masa $m = 500$ kg, que cae libremente desde cierta altura hace que un pilote se hunda en el suelo una profundidad $l = 1$ cm. Determinar la fuerza de resistencia F del suelo, suponiéndola constante, si la velocidad del martinete antes del golpe es $v = 10$ m/s. Despréciase la masa del pilote.

1.94. Un trineo, deslizándose por una superficie horizontal de hielo a la velocidad $v = 6$ m/s, sale a una superficie asfaltada. La longitud de las deslizaderas del trineo es $L = 2$ m, el coeficiente de rozamiento del trineo con el asfalto es $k = 1$. ¿Qué espacio recorrerá el trineo hasta pararse totalmente?

1.95. ¿Qué fuerza hace falta para sacar de una tabla un clavo de longitud $l = 80$ mm, si ha sido clavado de seis golpes con un martillo de masa $m = 0,5$ kg cuya velocidad inmediatamente antes del golpe era $v = 2$ m/s? Despréciase la masa del clavo.

1.96. ¿Qué trabajo hay que realizar para hacer que una tabla larga que descansa sobre el suelo gire en el plano horizontal, alrededor de uno de sus extremos, un ángulo α ? La longitud de la tabla es L , la masa, M , y el coeficiente de rozamiento entre la tabla y el suelo es k .

1.97. De un pozo cuya profundidad $H = 20$ m se saca agua con un cubo. Abajo el cubo se llena de agua hasta los bordes. Durante la elevación, parte del agua se derrama y vuelve a caer al pozo. Suponiendo que el cubo se eleva con movimiento uniforme y que la velocidad con que se derrama el agua es constante, determinar el trabajo que hay que realizar para subir el cubo, si al llegar éste arriba queda en él $\alpha = 2/3$ de la masa inicial de agua. La masa del cubo vacío es $m = 2$ kg y su volumen, $V = 15$ l.

1.98. En una alberca está sujeto un tubo vertical provisto de émbolo, de manera que su extremo inferior queda sumergido en el agua. El émbolo, que inicialmente se encuentra en la superficie del agua, sube lentamente hasta la altura $H = 15$ m (fig. 1.49). ¿Qué trabajo hay que producir al hacer esto? El área del émbolo es $S =$

$= 1 \text{ dm}^2$. La presión atmosférica $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. La masa del émbolo se desprecia.

1.99. Un péndulo simple (matemático) de longitud l y masa m se balancea de tal modo que cada vez que pasa por su posición de equilibrio actúa sobre él, durante un pequeño intervalo de tiempo t , una fuerza F dirigida paralelamente a su velocidad. ¿Al cabo de cuántas oscilaciones será la elongación igual a 90° ?

1.100. En dos cohetes (misiles), uno de los cuales está en movimiento y el otro en reposo, se conectan los motores durante un corto intervalo de tiempo. Mientras funcionan, ambos motores lanzan masas iguales de gas (pequeñas en comparación con la masa de los cohetes) cuyas velocidades son también iguales respecto de los respectivos cohetes. La energía cinética del cohete en movimiento, igual a K inicialmente, crece en un 4%. Determinar la energía cinética del otro cohete.

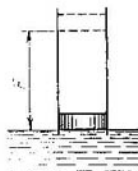


Fig. 1.49.

1.101. La fuerza $F = 20 \text{ N}$ actuando durante un pequeño intervalo de tiempo $t = 10^{-2} \text{ s}$ sobre un cuerpo en reposo le comunica la energía cinética $K_0 = 3 \text{ J}$. ¿Qué energía comunicaría esta misma fuerza a dicho cuerpo durante el tiempo t , si su velocidad inicial



Fig. 1.50.

fuerza $v_0 = 10 \text{ m/s}$ y la fuerza actuara en el sentido de la velocidad?

1.102. Una cuerda de longitud $l = 20 \text{ m}$ pasa por una polea. En el instante inicial la cuerda pende simétricamente y está en reposo, luego, a causa de un pequeño impulso, empieza a moverse por la polea. ¿Será uniformemente acelerado el movimiento de la cuerda? ¿Qué velocidad tendrá la cuerda en el instante en que abandona la polea? Despréciase la masa de la polea y considérese que el radio de ésta es pequeño.

1.103. Alrededor de un eje horizontal O puede girar libremente una palanca liviana cuyos brazos son iguales a l_1 y l_2 (fig. 1.50). En los extremos de esta palanca hay sujetas sendas cargas cuyas masas son m_1 y m_2 . ¿Qué velocidad tendrá en el punto inferior una de las cargas, si inicialmente se encontraba la palanca en posición horizontal?

1.104. ¿Qué potencia mínima debe tener una bomba que eleva agua por un tubo hasta la altura h ? La sección del tubo es S , el volumen de agua que se bombea en la unidad de tiempo es V , (fig. 1.51).

1.105. Un ventilador lanza un chorro de aire a través de una abertura en la pared. ¿Cuántas veces mayor debe ser la potencia N_1 del ventilador para que la masa de aire m_t lanzada en la unidad de tiempo se duplique?

1.106. La fig. 1.52 representa un engranaje. En el eje del motor va montado el piñón 1, que engrana con el piñón 2, montado en el árbol de trabajo. Se sabe que la potencia útil del motor es $N = 63 \text{ kW}$ y que el árbol de trabajo gira con la frecuencia $n = 3000 \text{ r.p.m.}$ Determinar los momentos M_1 y M_2 de las fuerzas que

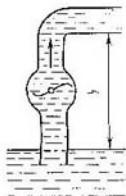


Fig. 1.51.

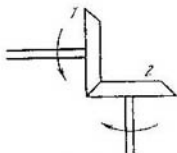


Fig. 1.52.

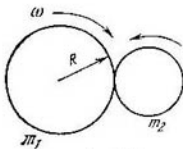


Fig. 1.53.

actúan sobre el árbol del motor y el árbol de trabajo, si la relación entre los números de dientes de las ruedas 1 y 2 es $m = 5$.

1.107. Hay dos cilindros de paredes delgadas. Uno de ellos, cuyo radio es R , gira alrededor de su eje con la velocidad angular ω y el otro está en reposo. Estos cilindros se ponen en contacto de modo que sus ejes de rotación quedan paralelos (fig. 1.53). Al cabo de cierto tiempo (en virtud del rozamiento) los cilindros empiezan a girar sin deslizamiento. ¿Qué cantidad de energía se habrá transformado en calor? Las masas de los cilindros son iguales a m_1 y m_2 .

1.108. Por un plano inclinado empiezan al mismo tiempo a deslizarse un cuerpo prismático rectangular y a rodar sin deslizamiento un aro. ¿Con qué coeficiente de rozamiento k entre el cuerpo prismático y el plano se moverán sin adelantarse entre sí dicho cuerpo y el aro? El ángulo de inclinación del plano es igual a α .

Leyes de conservación de la energía y del impulso

1.109. Un gimnasta de circo cae desde una altura $H = 1,5 \text{ m}$ sobre una red elástica de seguridad fuertemente tensada. ¿Cuál será la flecha máxima de pandeo que origina el gimnasta en la red, si en el caso en que éste descansa tranquilamente sobre ella la flecha es $l_0 = 0,1 \text{ m}$?

1.110. Un muelle liviano, de rigidez k y longitud l , está en posición vertical sobre una mesa. Desde la altura H respecto al nivel de la mesa cae sobre el muelle una bolita de masa m (fig. 1.54).

¿Qué velocidad máxima tendrá la bolita durante su movimiento hacia abajo? Despréciase el rozamiento.

1.111. En una pistola de juguete se coloca una bolita sobre el muelle que hay sujeto dentro del cañón. El muelle se comprime una longitud $l = 5$ cm y después se suelta estando el cañón dirigido verticalmente hacia arriba. La bolita se eleva hasta la altura $H = 0,5$ m. ¿Qué aceleración máxima experimenta dicha bolita? Suponer que ésta se desprende del muelle en el instante en que él acaba de estirarse. El rozamiento y la resistencia del aire se desprecian.

1.112. Un avión aterrizza sobre la cubierta de un porta-aviones teniendo la velocidad $v = 108$ km/h. Después de engancharse en el cable de retención elástica recorre la distancia $l = 30$ m hasta detenerse por completo. Determinar el peso máximo del piloto durante el aterrizaje, suponiendo que el frenado se debe únicamente a las fuerzas elásticas del cable (es decir, sin tener en cuenta las fuerzas de rozamiento). La masa del piloto es $m = 70$ kg.

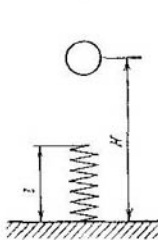


Fig. 1.54.

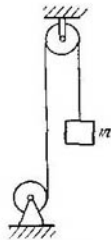


Fig. 1.55.

1.113. Una carga de masa $m = 10^3$ kg se baja por medio de un torno a la velocidad constante $v = 4$ m/s (fig. 1.55). ¿Cuál será la fuerza máxima de tensión del cable al detenerse de repente el torno, si la rigidez de aquél es $k = 5 \cdot 10^6$ N/m? Despréciase la masa del cable y el rozamiento.

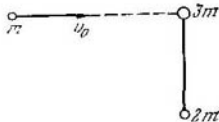


Fig. 1.56.

1.114. Dos cohetes (misiles) de igual masa M vuelan en la misma dirección, uno a la velocidad v y el otro a la velocidad $1,1 v$. Cuando el segundo alcanza al primero, éste conecta su motor por un corto

intervalo de tiempo. ¿Qué masa de combustible deberá lanzar con la velocidad $3v$ respecto del cohete para que se igualen las velocidades de ambos misiles?

1.115. Sobre una mesa lisa descansan las masas puntuales $3m$ y $2m$ (fig. 1.56) sujetas por una barra rígida sin peso. Con la masa $3m$ choca, y se pega a ella, un trocito de cera de modelar de masa m , que se mueve a lo largo de la mesa a la velocidad v_0 perpendicular a la barra. ¿Con qué velocidad debe moverse el observador para el cual el movimiento de la barra después de la colisión es de rotación pura? ¿En qué relación divide a la barra el punto alrededor del cual se efectúa la rotación?

1.116. Una carretilla se encuentra en reposo sobre unos raíles lisos. Un hombre pasa de un extremo a otro de la carretilla. ¿Qué distancia se desplazará dicha carretilla a ocurrir esto? La masa del hombre es $m_1 = 60$ kg. La masa de la carretilla es $m_2 = 120$ kg y su longitud, $L = 3$ m.

1.117. Una tabla de masa m_1 se desliza libremente por la superficie del hielo a la velocidad v_1 . Sobre la tabla salta desde la orilla un hombre de masa m_2 . La velocidad del hombre es perpendicular a la de la tabla e igual a v_2 . Determinar la velocidad v de la tabla con el hombre. La fuerza de rozamiento de la tabla con el hielo se desprecia.

1.118. Una cisterna abierta, con agua, se encuentra sobre unos raíles por los cuales se puede mover sin rozamiento. La masa de la cisterna es M , la masa del agua, m . En la cisterna cae verticalmente, desde una altura l sobre su centro, un cuerpo de masa m_0 . ¿Hacia qué lado, y qué distancia, se desplazará la cisterna cuando el movimiento del agua se haya calmado y el cuerpo esté flotando? Explicar el mecanismo de este fenómeno.

1.119. Un proyectil, disparado por un cañón, estalla, dividiéndose en dos fragmentos iguales, en el punto más alto de su trayectoria, a la distancia a del cañón (medida horizontalmente). Uno de los fragmentos es despedido hacia atrás con la misma velocidad que tenía el proyectil antes de estallar. ¿A qué distancia del cañón caerá el segundo fragmento? Despréciase la resistencia del aire.

1.120. Una bala de masa m incide en un taco de madera de masa M , suspendido de un hilo de longitud l (péndulo balístico), en el cual queda retenida la bala. ¿Qué ángulo α se desviará el péndulo si la velocidad de la bala es igual a v ?

1.121. Con una escopeta de aire comprimido se dispara sobre una caja de cerillas situada a la distancia $l = 30$ cm del extremo de una mesa. La bala, de masa $m = 1$ g, lanzada horizontalmente a la velocidad $v_0 = 150$ m/s atraviesa la caja y sale de ella con la velocidad $v_0/2$. La masa de la caja $M = 50$ g. ¿Con qué coeficiente de rozamiento k entre la caja y la mesa se caerá aquélla de ésta?

1.122. Dos partículas, cuyas masas son m y $2m$, tienen los impulsos p y $p/2$ y se mueven en direcciones perpendiculares entre sí. Estas partículas chocan y al hacerlo intercambian sus impulsos. Determinar la pérdida de energía mecánica que tiene lugar en la colisión.

1.123. Un cuerpo de masa m_1 que se mueve a la velocidad v , choca elásticamente con otro cuerpo en reposo y es despedido por él, formando un ángulo de 90° con la dirección inicial de su movimiento siendo la velocidad $v/2$. Determinar la masa del segundo cuerpo.

1.124. Una partícula de masa m , que se mueve a la velocidad v , choca elásticamente con otra partícula en reposo, cuya masa es $m/2$, y es despedida por ella, formando un ángulo α de 30° con la dirección inicial de su movimiento (fig. 1.57). ¿Con qué velocidad empezará a moverse la segunda partícula?

1.125. Dos bolitas elásticas penden de sendos hilos delgados de tal modo que se hallan a la misma altura y están en contacto. Las longitudes de los hilos son $l_1 = 10$ cm y $l_2 = 6$ cm. Las masas de las bolitas son $m_1 = 8$ y $m_2 = 20$ g. La bolita de masa m_1 se desvía un ángulo $\alpha = 60^\circ$ y se suelta. Determinar la elongación máxima de las bolitas después de la colisión. Suponer que el choque es perfectamente elástico.

1.126. Tres esferas de radios iguales, pero de masas diferentes, están suspendidas de hilos cuyas longitudes son iguales, de manera que se encuentran en contacto y forman una línea recta. La esfera de

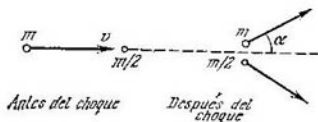


Fig. 1.57.

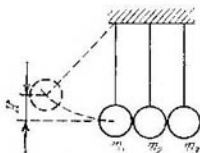


Fig. 1.58.

masa m_1 se desvía de tal modo que se eleva hasta la altura H (fig. 1.58) y se suelta. ¿Qué masas m_2 y m_3 deben tener las otras esferas para que después de las colisiones de la primera con la segunda y de la segunda con la tercera los impulsos de las tres esferas sean iguales? ¿A qué altura se elevarán? Considerar que todos los choques son perfectamente elásticos.

1.127. Dos esferas, una de acero, de masa m , y otra de plomo, de masa $m/4$, están suspendidas de hilos sujetos a un mismo punto. La esfera de plomo se desvía de tal modo que se eleva hasta la altura H y se suelta. Después del choque esta esfera se eleva hasta la altura h . El choque es central. Determinar la cantidad de energía que se transforma en calor.

1.128. Entre dos bolitas, cuyas masas son m_1 y m_2 , hay un muelle sometido a compresión. Si una de las bolitas (la de masa m_2) se mantiene en su sitio y la otra se deja libre, esta última es lanzada con la velocidad v_0 . ¿Con qué velocidad se moverá la bolita de masa m_1 si ambas bolitas se dejan libres al mismo tiempo? Las deformaciones del muelle son iguales en los dos casos.

1.129. Un cuerpo de masa M , bajo la acción de un muelle, realiza oscilaciones de amplitud A_0 sobre una mesa horizontal lisa. En el instante en que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio cae sobre él desde arriba un trozo de cera de modelar, de masa m , y se queda pegado al cuerpo. ¿Cómo variará la amplitud de las oscilaciones?

1.130. Dos bolitas de igual masa m , unidas entre sí por un muelle sin peso de rigidez k y longitud l , se encuentran en reposo sobre una mesa horizontal lisa. Una tercera bolita de masa m se mueve con la velocidad v_0 , siguiendo la recta que une los centros de las dos

primeras (fig. 1.59), y choca elásticamente con una de ellas. Determinar las distancias máxima y mínima entre las bolitas unidas por el muelle durante su ulterior movimiento. En los instantes en que son máximas la compresión y la extensión del muelle, las bolitas tienen la misma velocidad.

1.131. A una cuenta de vidrio de masa $m = 1 \text{ g}$ se comunica la velocidad $v_0 = 10 \text{ m/s}$ dirigida a lo largo de la aguja de hacer punto

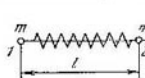


Fig. 1.59.

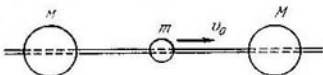


Fig. 1.60.

en que está ensartada (fig. 1.60). A ambos lados de la cuenta, ensartadas en la misma aguja, hay sendas pesas de igual masa $M = 1 \text{ kg}$. La cuenta choca elásticamente con ellas por turno y hace que se



Fig. 1.61.

muevan. Hallar la velocidad de las pesas en el instante en que cesan los choques, si durante el movimiento de los tres cuerpos el rozamiento es despreciable.

1.132. Un cuerpo de masa $m = 1 \text{ kg}$ se desliza sin rozamiento por una mesa horizontal lisa y luego sube por una rampa móvil de masa $M = 5 \text{ kg}$ (fig. 1.62). La altura de la rampa es $H = 1,2 \text{ m}$. Entre la rampa y la mesa no existe rozamiento. Hallar las velocidades finales del cuerpo y de la rampa. La velocidad inicial del cuerpo es $v_0 = 5 \text{ m/s}$.

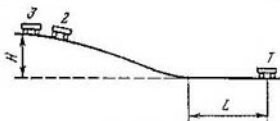


Fig. 1.62.

1.133. Un cuerpo que se desliza por una mesa horizontal lisa encuentra en su camino una rampa no sujeta cuya altura $H = 2 \text{ m}$ (véase la fig. 1.61). ¿Con qué velocidad mínima podrá el cuerpo salvar la rampa? La masa de ésta es cinco veces mayor que la del cuerpo. Suponer que dicho cuerpo se mueve sin separarse de la rampa. Tanto en el deslizamiento del cuerpo por la rampa como en el de la rampa por la mesa no existe rozamiento.

1.134. El perfil de una rampa de maniobras de ferrocarril (lomo de asno) se muestra en la fig. 1.62. En su parte horizontal, a la distancia L del final de la pendiente, se encuentra el vagón 1. De la rampa baja sin velocidad inicial el vagón 2 y, al cabo de cierto tiem-

po l , el vagón 3. ¿A qué distancia del final de la pendiente quedarán enganchados los tres vagones? Los tres vagones son iguales y están provistos de enganches automáticos. La altura de la rampa es H . Despréciese el rozamiento.

1.135. Un saco de harina se desliza sin velocidad inicial, desde la altura H , por una tabla lisa inclinada que forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con el horizonte. Al final del descenso el saco llega a un suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento del saco con dicho suelo es $k = 0.7$. ¿Dónde se parará el saco?

1.136. Un saco de harina se desliza sin velocidad inicial, desde la altura $H = 2$ m, por una tabla inclinada que forma el ángulo $\alpha = 45^\circ$ con el horizonte. Al terminar el descenso llega el saco a un

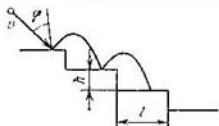


Fig. 1.63.



Fig. 1.64

suelo horizontal. Los coeficientes de rozamiento del saco con la tabla y con el suelo son iguales, $k = 0.5$. ¿A qué distancia del extremo de la tabla se parará el saco?

1.137. Una bolita de acero se desliza sin rozamiento por un suelo liso y choca con una pared de acero rugosa de manera que su velocidad forma un ángulo φ con la normal. ¿Cuál debe ser el ángulo φ para que la bolita sea despedida perpendicularmente al plano de la pared? El coeficiente de rozamiento entre la bolita y la pared es igual a k .

1.138. Un aparato espacial en forma de cono, de altura $H = 10$ cm y ángulo en el vértice $\alpha = 120^\circ$, se mueve a la velocidad $v = 10$ km/s con la punta hacia delante en las capas superiores de la atmósfera. Determinar la energía que dicho aparato comunica a las moléculas de aire en la unidad de tiempo. La concentración de moléculas es $n = 10^5$ cm $^{-3}$ y la masa de una molécula, $m = 4.5 \cdot 10^{-23}$ g. Suponer que las moléculas están en reposo y que sus choques con el aparato son perfectamente elásticos.

1.139. En un cilindro, lleno de gas, el émbolo se desplaza con la velocidad u . Determinar qué parte de su energía pierde una molécula, cuya velocidad sea perpendicular a la superficie del émbolo, al chocar con éste. La velocidad de la molécula $v \gg u$. Suponer que el choque de la molécula con el émbolo es perfectamente elástico.

1.140. Una bolita de acero lisa salta por una escalera larga, también lisa, botando una sola vez en cada escalón (fig. 1.63). En cada choque con un escalón pierde la bolita una cantidad de energía $\alpha = 50\%$. ¿Con qué velocidad v y bajo qué ángulo φ con la vertical fue lanzada la bolita? Los escalones tienen la altura $h = 10$ cm y la longitud de la escalera es $l = 20$ cm.

1.141. En la pared trasera de la torreta de un tanque, que marcha con la velocidad $u = 72 \text{ km/h}$, choca horizontalmente una bala, cuya velocidad $v_0 = 750 \text{ m/s}$, y rebota elásticamente en ella. ¿Qué velocidad tendrá la bala después de ser rechazada? La pared de la torreta forma un ángulo $\varphi = 30^\circ$ con la vertical (fig. 1.64).

Movimiento de rotación

1.142. Un aro de radio r rueda hacia abajo, sin deslizamiento, por una rampa de altura h (fig. 1.65). Hallar la velocidad y la aceleración de los puntos A y B del borde del aro.

1.143. A un eje vertical está sujeta una barra horizontal por la cual pueden desplazarse libremente dos pesas, cuyas masas son m_1

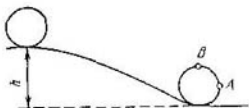


Fig. 1.65.

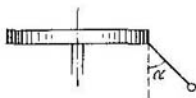


Fig. 1.66.

y m_2 , unidas entre sí por un hilo de longitud l . El sistema gira con la velocidad angular ω . ¿A qué distancia del eje se encontrarán las pesas en equilibrio? ¿A qué será igual en estas condiciones la fuerza de tensión del hilo y la energía cinética de las pesas?

Retornarán las pesas a la posición de equilibrio si se las desplaza de dicha posición a poca distancia?

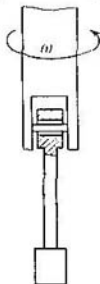


Fig. 1.67.

1.144. Una carga, suspendida de un hilo de longitud L , se mueve uniformemente por una circunferencia en el plano horizontal. Hallar el período de rotación de dicha carga si durante su movimiento el hilo forma con la vertical un ángulo α .

1.145. A un disco que gira horizontalmente está sujeta una plomada, la cual forma con la vertical un ángulo $\alpha = 45^\circ$ (fig. 1.66). La distancia desde el punto de suspensión de la plomada hasta el eje de rotación es $d = 10 \text{ cm}$ y la longitud del hilo $L = 6 \text{ cm}$. Determinar la velocidad angular de rotación del disco.

1.146. Del extremo de un árbol vertical está suspendida, por medio de un eje horizontal, una barra sin peso con una carga de masa $m = 10 \text{ kg}$, de manera que el punto de suspensión de la barra se encuentra en el eje del árbol (fig. 1.67). Hallar la fuerza de tensión de la barra si el árbol gira con la velocidad angular $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$. La longitud de la barra es $L = 1 \text{ m}$. ¿Cómo varía la fuerza de tensión de la barra si la velocidad angular aumenta hasta $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$?

1.147. En el fondo de una esfera de radio R se echa un puñado de arena. ¿Dónde se encontrarán los granitos de dicha arena una vez que la esfera se haga girar alrededor de su eje vertical con la velocidad angular ω ? El rozamiento de los granitos con la esfera es pequeño.

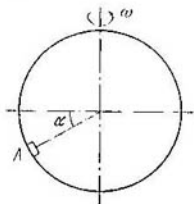


Fig. 1.68.

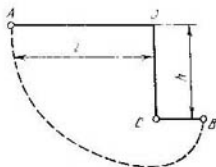


Fig. 1.69.

1.148. Determinar el radio R de un puente en arco con la condición de que la presión de un automóvil que se mueva con la velocidad $v = 90 \text{ km/h}$ se haga dos veces menor en el punto más alto del puente.

1.149. Desde el punto más alto de una cúpula esférica se desliza hacia abajo un cuerpo pequeño. ¿A qué altura h se desprenderá dicho cuerpo de la cúpula? El radio de la cúpula es R . Despréciase el rozamiento.

1.150. Sobre la superficie interna de una esfera hueca de radio R , que gira alrededor de su eje vertical con la velocidad angular constante ω , se halla una pequeña arandela A (fig. 1.68). Suponiendo conocido el ángulo α , hallar el coeficiente de rozamiento mínimo con el cual la arandela no cae hacia abajo.

1.151. ¿Qué velocidad mínima debe tener un péndulo simple cuando pasa por la posición de equilibrio estable para poder girar siguiendo una circunferencia en el plano vertical? Resolver este problema para los casos siguientes: a) el péndulo está suspendido de una varilla indeformable sin peso; b) el péndulo está suspendido de un hilo inextensible.

1.152. A un péndulo simple de masa m se le ha comunicado un impulso mínimo tal, que dicho péndulo da una vuelta completa en el plano vertical. ¿Cuál será la fuerza de tensión del hilo del péndulo cuando éste pasa por la posición de equilibrio? Despréciase el rozamiento.

1.153. Una bolita de masa m , que pende de un hilo de longitud l , se desvía hacia un lado de manera que dicho hilo ocupa la posición horizontal A , y se suelta sin empujarle. Abajo, a la distancia $h = (2/3)l$ del punto de suspensión O hay clavado un clavo C (fig. 1.69) ¿Qué fuerza de tensión tendrá el hilo en el instante en que ocupe la posición horizontal B ?

1.154. ¿Con qué velocidad angular mínima ω hay que hacer girar un cubo en el plano vertical, para que el agua que contiene no se derrame? La distancia desde la superficie del agua hasta el centro de rotación es l .

1.155. Dentro de la cámara de una rueda de automóvil hay un cuerpo pequeño. El radio de la rueda es $R=0,4$ m. ¿Con qué velocidad mínima v del automóvil girará el cuerpo junto con la rueda?

Despréciase el grosor de las cubiertas.

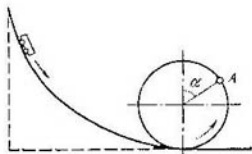


Fig. 1.70.

1.156. Una carretilla de masa m recorre el rizo de la muerte descendiendo desde la altura mínima necesaria para esto (fig. 1.70). ¿Con qué fuerza F presiona la carretilla sobre los raíles en el punto A , cuyo radio vector forma el ángulo α con la vertical? Despreciar el rozamiento.

1.157. Una carretilla pequeña recorre un rizo de la muerte de radio R descendiendo desde la altura mínima que asegura el paso por todo el rizo. ¿A qué es igual la aceleración total de la carretilla en el instante en que la velocidad es vertical? ¿A qué altura H la fuerza de presión sobre los raíles es igual a $2/3$ de la fuerza de la gravedad de la carretilla? Despréciase el rozamiento.

1.158. ¿Con qué velocidad mínima v puede marchar por un plano horizontal un motociclista describiendo un arco de radio $R=90$ m, si el coeficiente de rozamiento de la goma con el suelo es $k=0,42$? ¿Qué ángulo de inclinación tomará respecto de la vertical?

1.159. ¿Cuántas veces aumenta la velocidad máxima admisible de un ciclista por una pista peraltada con ángulo de inclinación α , en comparación con la velocidad admisible por una pista horizontal, a igualdad de los radios de curvatura y de los coeficientes de rozamiento k ?

1.160. Un disco horizontal de radio $R=10$ m gira alrededor de su eje con la frecuencia $n=2$ r.p.m. A lo largo del borde del disco, al encuentro de su rotación, marcha un motociclista con la velocidad $v=30$ km/h respecto del disco. ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento entre las cubiertas de la motocicleta y el disco para que aquélla no se deslice de éste?

1.161. ¿Qué velocidad debe llevar un motociclista para poder marchar por la pared vertical interna de un cilindro en un plano horizontal, si se sabe que marchando por una superficie horizontal con el mismo coeficiente de rozamiento el radio mínimo de viraje a la velocidad v es igual a R ? El radio del cilindro es R_1 . ¿Qué ángulo de inclinación α con la pared del cilindro tomará el motociclista?

1.162. Dos carreteras AB y CD que forman entre sí un ángulo $\alpha=120^\circ$ van a salir a una plaza redonda de radio $R=68$ m (fig. 1.71). ¿Con qué velocidad máxima puede marchar un automóvil por dicha plaza para pasar de una carretera a otra? El coeficiente

de rozamiento entre el asfalto y las cubiertas del automóvil es $k = 0,4$.

1.163. Un automóvil arranca y, aumentando la velocidad uniformemente, avanza por un trozo de carretera horizontal en forma de arco de circunferencia con ángulo $\alpha = 30^\circ$ (fig. 1.72). El radio de

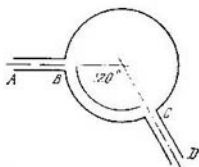


Fig. 1.71.

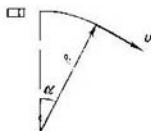


Fig. 1.72.

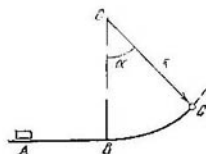


Fig. 1.73.

la circunferencia $R = 100$ m. ¿Con qué velocidad máxima v puede salir el automóvil a la parte recta de la carretera? El coeficiente de rozamiento de las ruedas con el suelo es $k = 0,3$.

1.164. Una canal lisa consta de una parte horizontal AB y de un arco de circunferencia BC con ángulo $\alpha = 45^\circ$ (fig. 1.73). El radio

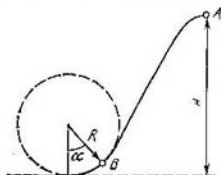


Fig. 1.74.

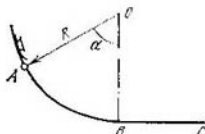


Fig. 1.75.

de la circunferencia es $R = 1$ m. Un cuerpo, cuya velocidad inicial $v = 10$ m/s, se desliza sin rozamiento por la canal. Determinar el módulo y la dirección de la aceleración del cuerpo en el punto C .

1.165. La parte final de la pista de impulso de un trampolín para saltos de esquí tiene la forma de arco de circunferencia de radio $R = 15$ m (fig. 1.74). La altura total de la pista es $H = 50$ m. Hallar la aceleración total del saltador en el punto B , si el ángulo $\alpha = 30^\circ$. Suponer que el esquiador desciende desde el punto A sin velocidad inicial. Despréciase el rozamiento.

1.166. El declive de una pista de trineo tiene la forma de arco de circunferencia AB de radio $R = 10$ m con salida suave a una superficie horizontal BC (fig. 1.75). La superficie de la pista es lisa y la de la parte horizontal, rugosa con coeficiente de rozamiento $k = 0,15$. ¿A qué distancia del final del declive se parará el trineo que desciende por él, si en el punto A su aceleración total es igual en módulo a la

aceleración de caída libre g ? El radio trazado por el punto A forma con la vertical el ángulo $\alpha = 60^\circ$.

1.167. La salida del declive de una pista de trineo a la superficie horizontal tiene la forma de arco de circunferencia de radio $R = 4$ m. La superficie de la pista es lisa y la de la parte horizontal, rugosa con



Fig. 1.76.

coeficiente de rozamiento $k = 0.2$. Un trineo, después de descender por el declive, se para a la distancia $l = 30$ m del final de éste. ¿A qué altura h experimentará el conductor del trineo la doble sobrecarga?

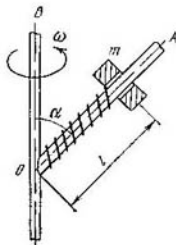


Fig. 1.77

1.168. Uno de los extremos de un muelle está sujeto al clavo O , clavado en una mesa, y el otro, al cuerpo B (fig. 1.75). Este, deslizando por la mesa sin rozamiento, realiza un movimiento circular, con velocidad lineal v , alrededor del clavo. Hallar el radio de la circunferencia por la cual se mueve el cuerpo. La longitud del muelle sin deformarse es l_0 . Esta longitud se duplica si al muelle se sujeta el cuerpo B . Desprecie la masa del muelle y considérese que su alargamiento es directamente proporcional a la carga.

1.169. La varilla OA gira respecto del eje vertical OB con la velocidad angular ω (fig. 1.77). El ángulo entre el eje y la varilla es α . Por la varilla se desliza sin rozamiento un manguito de masa m , unido al punto O por medio de un muelle. Determinar la posición del manguito durante la rotación. La longitud del muelle no deformado es l_0 y su rigidez, k .

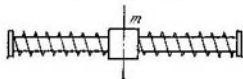


Fig. 1.78.

1.170. Una arandela de masa m está sujeta por medio de dos muelles iguales a los extremos de una varilla que gira alrededor del eje vertical que pasa por su punto medio (fig. 1.78). Hallar la velocidad angular ω de la varilla con la cual son posibles los movimientos circulares de la arandela. ¿A qué distancia del centro de la varilla deberá encontrarse, en este caso, la arandela? La rigidez del muelle es igual a k . El rozamiento entre la arandela y la varilla se desprecia.

1.171. Por el «ecuador» de la superficie interna de una envoltura esférica de masa M se mueve una bolita de masa m , dando una vuelta completa en el tiempo T (con velocidad de módulo constante). Suponiendo que no existan fuerzas exteriores ni rozamiento, determinar con qué fuerza presiona la bolita sobre la envoltura esférica. La distancia entre el centro de la bolita y el de la esfera es igual a a .

Gravitación. Satélites

1.172. Un satélite artificial de comunicaciones, geostacionario, situado en el plano del ecuador de la Tierra, durante todo el tiempo se encuentra en el cenit de un mismo punto de la esfera terrestre. ¿Cuántas veces mayor es el radio R de la órbita del satélite que el radio de la Tierra $R_T = 6400$ km? Considerar conocida la aceleración de caída libre cerca de la superficie de la Tierra: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

1.173. Un satélite artificial de la Tierra ha sido lanzado desde el ecuador y se mueve por una órbita circular en el plano del ecuador en el sentido de la rotación de la Tierra. Hallar la relación entre el radio de la órbita del satélite y el radio de la Tierra, con la cual aquél pasa periódicamente sobre el punto de lanzamiento exactamente cada dos días. El radio de la Tierra $R_T = 6400$ km.

1.174. Un satélite artificial de la Tierra ha sido lanzado desde el ecuador y se mueve por una órbita circular en el plano de éste en el sentido de la rotación de la Tierra. El radio de la órbita del satélite $R = 3R_T$, siendo $R_T = 6400$ km el radio de la Tierra. ¿Al cabo de cuánto tiempo pasará por primera vez el satélite sobre el punto de lanzamiento?

1.175. Suponiendo que las órbitas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente circulares, hallar la relación entre las masas de la Tierra y el Sol. Se sabe que la Luna da 13 vueltas alrededor de la Tierra durante un año y que la distancia del Sol a la Tierra es 390 veces mayor que la distancia de la Luna a la Tierra.

1.176. Determinar la relación entre las masas de Marte y la Tierra por los parámetros de la órbita de la estación espacial automática «Mars-2»: alejamiento máximo de la superficie (en el apocentro) $a = 25\,000$ km, el mínimo (en el pericentro) $p = 1380$ km, el período de revolución $T = 18$ h. El radio de Marte $R_T = 3400$ km. El radio de la Tierra $R_T = 6400$ km.

1.177. Uno de los satélites de Júpiter se mueve por una órbita de radio $R_1 = 4,22 \cdot 10^5$ km y da una vuelta completa en un tiempo $T_1 = 1,77$ días. ¿Cuántas veces mayor es la masa de Júpiter que la masa de la Tierra? Se sabe que la Luna se mueve por una órbita de radio $R_2 = 3,8 \cdot 10^5$ km con un período $T_2 = 27,3$ días.

1.178. Calcular la primera velocidad cósmica (o de satelización) de lanzamiento desde la superficie de Júpiter, utilizando los parámetros de la órbita del satélite Ganimedes de dicho planeta, el cual se mueve prácticamente por una órbita circular de radio $R = 1 \cdot 10^6$ km

con período $T = 7,15$ días. El radio de Júpiter es $R_J = 70\,000$ km.

1.179. ¿A qué distancia máxima del Sol se aleja el cometa Halley? Su período de rotación alrededor del Sol es $T = 76$ años, la distancia mínima del Sol a que pasa es $R_{\min} = 1,8 \cdot 10^8$ km. El radio de la órbita de la Tierra es $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ km.

1.180. Un satélite artificial se mueve alrededor de la Tierra por una órbita circular cuyo radio es $R = 3R_T$, siendo $R_T = 6400$ km el radio de la Tierra. Como resultado de una acción de corta duración del dispositivo de frenado, la velocidad del satélite disminuye de tal forma que éste empieza a moverse por una órbita elíptica tangente a la superficie de la Tierra (fig. 1.79). ¿Al cabo de cuánto tiempo, después de esto, aterrizará el satélite?

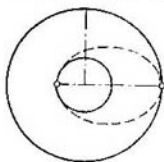


Fig. 1.79.

1.181. Dos estrellas, bajo la acción de la fuerza de atracción gravitatoria mutua, describen órbitas circulares alrededor de su centro de masas común con un período $T = 2$ años. La suma de las masas de las estrellas

$m_1 + m_2 = 2M_S$, siendo M_S la masa del Sol. Hallar la distancia entre dichas estrellas sabiendo que la distancia media de la Tierra al Sol es $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ km. La masa de la Tierra es despreciable en comparación con la masa del Sol.

1.182. Para crear la gravedad artificial en un trozo pasivo de trayectoria, dos partes de una nave espacial (entre las cuales existe la relación 1 : 2) se separan hasta la distancia L y se hacen girar, por medio de un motor auxiliar, respecto de su centro de masas común. Determinar el período de rotación, si el reloj de péndulo que hay en la cabina del cosmonauta que se encuentra en la parte de la nave cuya masa es mayor marcha dos veces más despacio que en la Tierra.

1.183. Se sabe que, a causa de la rotación del planeta, la fuerza de la gravedad en el ecuador es menor que en el polo. ¿A qué altura h sobre la superficie del planeta en el polo la fuerza de la gravedad será igual que dicha fuerza sobre la superficie en el ecuador? Suponer que el planeta es una esfera de radio R . El tiempo de rotación del planeta alrededor de su eje es T y la densidad media de la sustancia del planeta, ρ .

1.184. El radio de uno de los asteroides es $R_a = 5$ km. Suponiendo que su densidad sea $\rho_a = 5,5$ g/cm³, hallar la aceleración de caída libre g_a sobre su superficie. ¿A qué altura se elevaría un hombre si, hallándose en dicho asteroide, saltara haciendo el esfuerzo que en la Tierra sería suficiente para subir a 5 cm de altura? Considerar que el asteroide tiene forma esférica.

1.185. ¿Cuál será la aceleración de caída libre sobre la superficie del Sol, si el radio de éste es 108 veces mayor que el de la Tierra y entre su densidad y la de la Tierra existe la relación 1 : 4?

1.186. Calcular la aceleración de caída libre sobre la superficie del Sol, si el radio de la órbita terrestre es $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ km, el radio

del Sol es $R_s = 7 \cdot 10^5$ km y el tiempo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es $T = 1$ año.

1.187. Determinar el período mínimo del satélite de una estrella neutrónica. La densidad de ésta es $\rho = 10^{17}$ kg/m³.

1.188. Un satélite artificial de masa $M = 200$ kg se mueve por una órbita circular alrededor de la Tierra. Su distancia a la superficie de ésta es pequeña comparada con el radio de la Tierra. ¿Cuánto puede variar el radio de la órbita si desde el satélite se hace un disparo? La masa de la bala es $m = 5$ g, su velocidad, $u = 1$ km/s y de sentido opuesto a la velocidad del satélite.

1.189. La tercera etapa de un misil está formada por el cohete portador, cuya masa es $M = 50$ kg, y el cono protector de cabeza, la masa del cual es $m = 10$ kg. Este cono es lanzado hacia delante

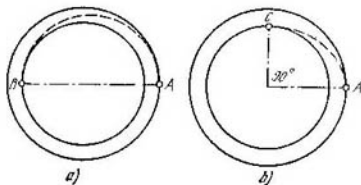


Fig. 1.80.

por un muelle en compresión. En los experimentos hechos en tierra con el cohete sujeto, el muelle comunica al cono la velocidad $v_0 = 5,1$ m/s. ¿Cuál será la velocidad relativa del cono y el cohete si su separación tiene lugar en la órbita?

1.190. Un satélite artificial en órbita circular a la altura $H = 500$ km sobre la superficie de la Tierra es frenado por las capas superiores de la atmósfera. La aceleración angular del satélite es $\beta = 3 \cdot 10^{-13}$ rad/s². ¿A qué altura se encontrará el satélite al cabo de un mes? El radio de la Tierra es $R_T = 6400$ km.

1.191. Se sabe que en la actualidad la Luna se aleja de la Tierra con la velocidad $v = 3,3$ cm/año. Hallar la aceleración angular de la Luna. La distancia media entre la Luna y la Tierra es $R = 3,84 \cdot 10^5$ km; la velocidad angular de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es $\omega = 2,56 \cdot 10^{-6}$ rad/s.

1.192. Un cohete se lanza desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba con la primera velocidad cósmica (de satelización) y retorna a la Tierra en un punto próximo al de lanzamiento. ¿Cuánto tiempo dura su vuelo? El radio de la Tierra es $R_T = 6400$ km.

1.193. Unos cosmonautas que se hallan en la Luna deben volver a la nave espacial básica, en órbita circular a una altura igual al radio de la Luna, $R_L = 1700$ km. ¿Qué velocidad inicial v sobre la superficie de la Luna hay que comunicarle a la cabina para que

el empalme («cita») con la nave espacial básica sea posible sin necesidad de corregir el módulo de la velocidad de la cabina? La aceleración de caída libre sobre la superficie de la Luna es $g_L = 1,7 \text{ m/s}^2$.

1.194. Una nave espacial de masa $M = 12 \text{ t}$ se mueve alrededor de la Luna por una órbita circular a la altura $h = 100 \text{ km}$. Para pasar a la órbita de alunizaje se conecta el motor por poco tiempo. La velocidad de los gases que salen de la tobera del cohete es $u = 10^4 \text{ m/s}$. El radio de la Luna, $R_L = 1700 \text{ km}$ y la aceleración de caída libre en la superficie lunar, $g_L = 1,7 \text{ m/s}^2$.

a) ¿Qué masa de combustible habrá que gastar para que, si el motor de frenado se conecta en el punto A de la trayectoria, la nave se pose sobre la Luna en el punto B (fig. 1.80, a)?

b) ¿Qué masa de combustible habrá que gastar para que comunicándole a la nave en el punto A un impulso en dirección al centro de la Luna, hacer que pase a la órbita que toca la superficie de ésta en el punto C (fig. 1.80, b)?

Aplicación de las leyes de la mecánica en la física nuclear

1.195. Un átomo se escinde en dos partes cuyas masas resultan ser iguales a M_1 y M_2 . Determinar sus velocidades, si la energía cinética total de las partes es igual a T .

1.196. En la desintegración β del átomo del isótopo radiactivo del radio ^{226}Ra se desprende de él un electrón cuya energía $T_e = 0,05 \text{ MeV}$. Al ocurrir esto el isótopo de radio se transforma en isótopo del actinio ^{226}Ac . ¿Qué energía cinética tiene el átomo de actinio?

1.197. El radón es un gas radiactivo α cuya masa atómica $A = 222$. ¿Qué parte de la energía total que se desprende durante la desintegración del radón se lleva la partícula α ?

1.198. Un neutrón de energía $T = 10^{-15} \text{ J}$ es absorbido por un núcleo de cadmio que inicialmente estaba en reposo. Determinar la velocidad v del núcleo recién formado.

1.199. Un neutrón choca elásticamente con un núcleo de helio (partícula α) y, después de ser rechazado, choca elásticamente con otro núcleo de helio (en los choques elásticos la energía cinética total se conserva). Los núcleos de helio estaban en reposo hasta entonces. Suponiendo centrales ambos choques (las velocidades antes y después de las colisiones están dirigidas a lo largo de la línea de los centros de las partículas que chocan), determinar cuánto varía la energía del neutrón después de los choques.

1.200. La reacción de síntesis de los isótopos del hidrógeno, pesado (deuterio) y superpesado (tritio), $^2\text{H} + ^3\text{H} = ^4\text{He} + n$ se estudia dirigiendo los núcleos de deuterio, acelerados hasta la energía $T = 2 \text{ MeV}$, sobre un blanco de tritio. Un detector registra los neutrones que salen lanzados perpendicularmente a la dirección del haz de núcleos de deuterio. Determinar la energía de los neutrones

registrados, si en la reacción se desprende la energía $Q = 14$ MeV.

1.201. Como resultado de la interacción de los núcleos de deuterio y de tritio se forma un núcleo de helio y un neutrón: ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} = {}^4\text{He} + n$. Al ocurrir esto se desprende una cantidad importante de energía. ¿Qué parte de esta energía se lleva consigo el neutrón? La energía cinética del deuterio y del tritio antes de la reacción es despreciable comparada con la energía que se desprende.

1.202. Cuando un neutrón es capturado por un núcleo de litio se produce la reacción nuclear ${}^6\text{Li} + n = {}^3\text{H} + {}^4\text{He}$, en la cual se desprende la energía $Q = 4,8$ MeV. Hallar cómo se distribuye la energía entre los productos de la reacción. Considerar que la energía cinética de las partículas iniciales es despreciable.

1.203. Al fundirse núcleos de deuterio y de litio se produce la reacción nuclear ${}^6\text{Li} + {}^2\text{H} = {}^7\text{Be} + n$, en la cual se desprende la energía $Q = 3,37$ MeV. Hallar cómo se distribuye la energía entre los productos de la reacción. Considerar despreciable la energía cinética de las partículas iniciales.

1.204. Una partícula α , cuya velocidad es de 1000 m/s, choca con un átomo de carbono que antes del choque se movía en la misma dirección, pero con una velocidad dos veces menor. ¿Con qué velocidad se desplaza el centro de masas del sistema que forman las partículas que chocan?

1.205. La reacción nuclear ${}^{14}\text{N} + {}^4\text{He} = {}^{17}\text{O} + p$ puede desarrollarse si las partículas α que chocan con los núcleos de nitrógeno en reposo tienen una energía mayor que la energía umbral $E_u = 1,45$ MeV. ¿Cuánto mayor que la energía umbral debe ser la energía de las partículas α para que la energía cinética de los protones que se forman sea nula?

1.206. En la reacción nuclear ${}^7\text{Li} + p = {}^7\text{Be} + n$ los protones chocan con los núcleos de litio que están en reposo. Si la energía de los protones que chocan es $E = 1,92$ MeV, los neutrones que se originan en la reacción están en reposo. ¿Cuánto se puede disminuir la energía de los protones incidentes para que la reacción pueda desarrollarse en general?

II. CALOR

Dilatación de los cuerpos

2.1. En el centro de un disco de acero hay un orificio de diámetro $d = 4,99$ mm (a 0°C). ¿Hasta qué temperatura hay que calentar el disco para que por el orificio empiece a pasar una bola de diámetro $D = 5,00$ mm? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

2.2. Una bola de vidrio, cuyo coeficiente de dilatación cúbica es β , se pesa tres veces: en el aire y en un líquido a las temperaturas

t_1 y t_2 . Las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas son: P , P_1 y P_2 . Determinar el coeficiente de dilatación cúbica β_1 del líquido.

2.3. Dos láminas, una de acero y otra de bronce, de igual espesor $a = 0,2$ mm, están remachadas entre sí por sus extremos de manera que a la temperatura $T_1 = 293$ K forman una lámina bimetalica plana. ¿Cuál será el radio de flexión de esta lámina a la temperatura $T_2 = 393$ K? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha_1 = 1,1 \cdot 10^{-5}$ K $^{-1}$ y el del bronce, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ K $^{-1}$.

2.4. Una barra de bronce se enfría en nitrógeno líquido hasta la temperatura $T_1 = 72$ K. Así enfriada, esta barra se introduce ajustadamente en la abertura rectangular de una abrazadera rígida, que está a la temperatura $T_2 = 293$ K, de manera que la holgura entre los extremos de la barra y los planos correspondientes de la abertura de la abrazadera puede considerarse nula. ¿Qué presión ejercerá la barra sobre la abrazadera cuando se caliente hasta la temperatura $T_2 = 293$ K? El coeficiente de dilatación lineal del bronce es $\alpha = 1,75 \cdot 10^{-6}$ K $^{-1}$ y el módulo de Young $E = 1,04 \cdot 10^{11}$ Pa.

2.5. Entre dos paredes se encuentra una barra, de sección S , compuesta de dos partes de igual longitud $l/2$ que tienen los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 y los módulos de Young E_1 y E_2 . A la temperatura T_1 los extremos de la barra apenas tocan las paredes. ¿Con qué fuerza presionará dicha barra sobre las paredes si se calienta hasta la temperatura T_2 ? Despréciase la deformación de las paredes. ¿Cuánto se desplazará la junta de las partes de la barra?

2.6. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura $T_1 = 573$ K y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es $T_2 = 291$ K. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 291 K? El coeficiente de dilatación lineal del latón es $\alpha = 1,84 \times 10^{-6}$ K $^{-1}$ y su módulo de Young $E = 6,47 \cdot 10^{10}$ Pa. Las dimensiones de la sección del anillo son 2×5 mm ^{2} .

Ecuación de estado de los gases

2.7. ¿Qué presión crea una masa $m = 1$ kg de nitrógeno en un volumen $V = 1$ m ^{3} a la temperatura $t = 27$ °C?

2.8. La temperatura de una habitación es $t_1 = 10$ °C. Después de encender la estufa su temperatura se eleva hasta $t_2 = 20$ °C. La capacidad de la habitación es $V = 50$ m ^{3} y la presión en ella, $P = 97$ kPa. ¿Cuánto habrá variado la masa de aire que había en dicha habitación? La masa molar del aire es $\mu = 29$ g/mol.

2.9. Antes de salir disparada la bala del cañón de un fusil, el volumen que ocupan los gases de la pólvora (es decir, los productos de su combustión) es $n = 100$ veces mayor que el volumen de la pólvora sólida. La temperatura de los gases en este instante es $T = 1000$ K. La masa molar de los productos de la combustión es $\mu = 30$ g/mol y la densidad de la pólvora sólida, $\rho = 1$ g/cm ^{3} .

Determinar la presión de los gases de la pólvora al salir disparada la bala.

2.10. Una botella de helio a la presión $P_1 = 6,5 \cdot 10^6$ Pa y la temperatura $t_1 = -3^\circ\text{C}$ tiene la masa $M_1 = 21$ kg, y a la presión $P_2 = 2 \cdot 10^6$ Pa y la misma temperatura, la masa $M_2 = 20$ kg. ¿Qué masa de helio contiene la botella a la presión $P = 1,5 \cdot 10^7$ Pa y a la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$?

2.11. Una botella, que contiene nitrógeno a la presión $P_1 = 1,5 \cdot 10^7$ Pa y temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, tiene la masa $m_1 = 97$ kg. Cuando una parte del nitrógeno se ha gastado, de manera que a la temperatura $t_2 = -3^\circ\text{C}$ la presión en la botella se hace igual a $P_2 = 6 \cdot 10^6$ Pa, la masa de la botella con el nitrógeno es igual a $m_2 = 93,5$ kg. ¿Qué cantidad de nitrógeno quedará en dicha botella?

2.12. Un botellín para hacer agua gaseosa tiene la capacidad $V = 5$ cm³ y contiene ácido carbónico a la presión $P = 15$ atm ($1,5 \times 10^6$ Pa). ¿Se puede apreciar con una balanza cuya precisión es de 10 mg la diferencia de masa entre un botellín lleno y otro vacío?

2.13. Un submarinista emplea el tiempo $\tau_1 = 10$ min en inspeccionar los deterioros de la parte sumergida de un barco. En este tiempo la presión en el balón del acualong, que inicialmente era $P_1 = 150$ atm ($1,5 \cdot 10^7$ Pa), desciende un 20%. Después, el submarinista empieza a hacer las reparaciones y el gasto de aire aumenta vez y media. ¿Al cabo de cuánto tiempo τ de haberse sumergido tiene que terminar su trabajo dicho submarinista, si la presión no debe descender a menos de $P_2 = 30$ atm ($0,3 \cdot 10^7$ Pa)?

2.14. De un recipiente se desea extraer hidrógeno ($P = 40^6$ Pa y $T = 80$ K) valiéndose de una bomba de adsorción, es decir, de una ramificación con adsorbente enchufada al recipiente. La masa del hidrógeno adsorbido no supera 1/50 de la masa del adsorbente mismo. ¿Qué capacidad puede tener el recipiente que se consigue vaciar por medio de una masa $m = 1$ kg de adsorbente?

2.15. En un recipiente de capacidad $V = 1,1$ dm³ hay $m = 100$ g de adsorbente e hidrógeno a la temperatura $t = -193^\circ\text{C}$ y la presión $P = 2 \cdot 10^4$ Pa. El adsorbente, a esta temperatura, absorbe una masa de hidrógeno igual a 1/50 de la masa del adsorbente mismo. Determinar la presión P_1 en el recipiente si se calienta hasta la temperatura $t_1 = 31^\circ\text{C}$, a la cual todas las moléculas de hidrógeno abandonan el adsorbente. La densidad del adsorbente es $\rho = 1$ g/cm³.

2.16. El balón de un hornillo de gas tiene 0,5 dm³ de capacidad y contiene 300 g de propano (C_3H_8) a la presión de $1,6 \cdot 10^6$ Pa. ¿En qué estado de agregación se encuentra el propano en el balón?

2.17. El volumen de cierta masa de gas perfecto, al elevar su temperatura 1 K a presión constante, aumenta en 1/335 de su valor inicial. ¿A qué temperatura se encontraba el gas al principio?

2.18. Al elevar 1 K la temperatura de un gas a volumen constante, la presión aumentó un 0,2%. ¿A qué temperatura inicial se encontraba el gas?

2.19. Un satélite artificial se sumerge en la sombra de la Tierra. Al ocurrir esto la temperatura dentro de él, que al principio era $T = 300\text{ K}$, desciende un 1%, a causa de lo cual la presión del aire disminuye en la magnitud $\Delta P = 10,5\text{ hPa}$. Determinar la masa de aire que hay en el satélite, si su capacidad es $V = 10\text{ m}^3$.

2.20. Cierta masa de hidrógeno ocupa el volumen $V = 10\text{ dm}^3$ a la presión $P = 10^7\text{ Pa}$ y la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$. ¿Qué masa de hidrógeno se habrá gastado si al quemar el hidrógeno sobrante se forman $0,5\text{ dm}^3$ de agua?

2.21. Una masa de gas ocupa el volumen V_1 a la presión P_1 y la temperatura T_1 . Este gas se calienta a volumen constante hasta la temperatura $T_2 = 2T_1$ y después se expande a presión constante hasta el volumen $V_2 = 4V_1$. Del estado que resulta el gas se hace volver al inicial (P_1, V_1, T_1) de forma que durante este proceso $PV^n = \text{const}$. Determinar el exponente n de la potencia.

2.22. Un gas perfecto se expande según la ley $P = b/V^n$, en la que b y n son ciertas constantes y $0 < n < 1$. ¿Qué ocurre con el gas, se calienta o se enfría?

2.23. Una botella que contiene $m_1 = 1\text{ kg}$ de nitrógeno, al ser sometida a ensayo revienta a la temperatura $T_1 = 350^\circ\text{C}$. ¿Qué masa de hidrógeno m_2 podrá guardarse en otra botella igual, a la temperatura $T_2 = 20^\circ\text{C}$, con un margen de seguridad 5?

2.24. ¿Hasta qué temperatura hay que calentar una esfera soldada, que contiene $m = 17,5\text{ g}$ de agua, para que reviente, si se sabe que sus paredes resisten la presión máxima $P = 10^7\text{ Pa}$ y su capacidad $V = 1\text{ dm}^3$?

2.25. Los gases licuados se guardan en vasijas que tienen comunicación con la atmósfera. En una de estas vasijas de $V = 10\text{ dm}^3$ de capacidad hay $v = 0,5\text{ dm}^3$ de nitrógeno líquido, cuya densidad $\rho = 0,81\text{ g/cm}^3$. Por error, la vasija se cierra fuertemente. ¿Reventará esta vasija cuando se vaporice el nitrógeno y se caliente hasta la temperatura ambiente? La vasija puede resistir la presión $P_0 = 2 \cdot 10^6\text{ Pa}$.

2.26. Un balón de vidrio a temperatura constante se pesa tres veces: a) vacío (es decir, después de extraer el aire de él), b) lleno de aire a la presión atmosférica $P_a = 10^5\text{ Pa}$, y c) lleno de un gas desconocido a la presión $P_g = 1,5 \cdot 10^5\text{ Pa}$. Resulta que $m_1 = 200\text{ g}$, $m_2 = 204\text{ g}$ y $m_3 = 210\text{ g}$. Determinar la masa molar del gas desconocido μ_g . La masa molar del aire es $\mu_a = 29\text{ g/mol}$.

2.27. Un balón cuya capacidad $V_1 = 200\text{ dm}^3$ contiene nitrógeno a la presión $P_1 = 2 \cdot 10^6\text{ Pa}$ y temperatura $T_1 = 273\text{ K}$. Parte del gas se gasta y una nueva medición de la presión, efectuada a la temperatura $T_2 = 253\text{ K}$, da el valor $P_2 = 1,5 \cdot 10^6\text{ Pa}$. ¿Qué volumen ocupará el gas gastado en condiciones normales?

2.28. De un balón de capacidad $V_1 = 200\text{ dm}^3$, que contiene helio a la presión $P_1 = 2 \cdot 10^5\text{ Pa}$ y temperatura $T_1 = 273\text{ K}$, se gasta una parte del gas que en condiciones normales ocupa el volumen $V = 1\text{ m}^3$. Después se vuelve a medir la presión en el balón y se ob-

tiene el valor $P_2 = 1,4 \cdot 10^6$ Pa. ¿A qué temperatura se hace esta medición?

2.29. La masa $m = 716$ mg de un compuesto orgánico, cuya fórmula es $(C_3H_6O)_n$, a la presión $P = 10^6$ Pa y la temperatura $t = 200^\circ\text{C}$ ocupa en estado gaseoso el volumen $V = 243$ cm³. Hallar n .

2.30. Hallar la fórmula de cierto compuesto de carbono e hidrógeno sabiendo que $m = 0,65$ g de esta sustancia en estado gaseoso crea, en un volumen $V = 1$ dm³ a la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$, la presión $P = 10^6$ Pa.

2.31. Hallar la fórmula de cierto compuesto de carbono y oxígeno sabiendo que $m = 1$ g de esta sustancia en estado gaseoso crea, en un volumen $V = 1$ dm³ a la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$, la presión $P = 5,6 \cdot 10^4$ Pa.

2.32. Un rayo globular es una esfera de gas débilmente luminosa que flota libremente en el aire. Se suele observar después de la tormenta. Según uno de los modelos, este rayo está formado por un gas perfecto, consistente en un compuesto complejo cada una de cuyas moléculas contiene un ion de nitrógeno ligado con varias moléculas de agua. La temperatura del rayo $t = 600^\circ\text{C}$ y la del aire circundante $t_0 = 20^\circ\text{C}$. ¿Cuántas moléculas de agua liga cada ion de nitrógeno? Los electrones perdidos por el átomo de nitrógeno están ligados con las moléculas de agua de tal modo que la molécula compleja en conjunto sigue siendo neutra.

2.33. Por un tubo conductor de gas pasa anhídrido carbónico a la presión $P = 4 \cdot 10^5$ Pa y la temperatura $t = 7^\circ\text{C}$. ¿Qué velocidad media tiene el gas que se mueve por el tubo si durante el tiempo $\tau = 10$ min pasa una masa $m = 2$ kg de anhídrido carbónico? El área de la sección del tubo es $S = 5$ cm².

2.34. ¿Con qué fuerza máxima se adhiere al cuerpo una ventosa (de las que se usan en medicina), si el diámetro de su boca $D = 4$ cm? En el instante de aplicarla al cuerpo el aire que hay en ella se calienta hasta la temperatura $t = 80^\circ\text{C}$ y la temperatura del aire circundante es $t_0 = 20^\circ\text{C}$. La presión atmosférica es $P_0 = 10^6$ Pa. La variación del volumen del aire que hay en la ventosa (debida a la succión de la piel) se desprecia.

2.35. En un cilindro, bajo el émbolo, cuya área $S = 100$ cm², se encuentra $m = 28$ g de nitrógeno a la temperatura $T_1 = 273$ K. El cilindro se calienta hasta la temperatura 373 K. ¿A qué altura Δh se elevará el émbolo si su masa $M = 100$ kg? La presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa.

2.36. En un cilindro, bajo el émbolo, cuya área $S = 100$ cm², se encuentra $m = 28$ g de nitrógeno a la temperatura $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Al émbolo, por medio de un sistema de poleas, está colgada una pesa de masa $M = 50$ kg (fig. 2.1). El cilindro se enfría hasta $t_2 = 0^\circ\text{C}$. ¿A qué altura Δh se elevará la pesa? La presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa. La masa del émbolo se desprecia.

2.37. En un cilindro vertical de sección S , debajo del émbolo, cuya masa es m , hay aire a la temperatura T_1 . Cuando sobre el

émbolo se coloca una pesa de masa M , la distancia desde él hasta el fondo del cilindro disminuye n veces. ¿Cuánto se elevará la temperatura del aire en el cilindro? La presión atmosférica es igual a P_0 .

2.38. En un cilindro vertical de sección S , debajo del émbolo, cuya masa es m , hay aire. Sobre el émbolo se encuentra una pesa. Si se quita dicha pesa, el volumen que ocupa el aire que hay debajo del émbolo se duplica y la temperatura de dicho aire se hace dos veces menor. Determinar la masa de la pesa M . La presión atmosférica es igual a P_0 .

2.39. Para que disminuya n veces, por vía isotérmica, el volumen del gas que hay en un cilindro con émbolo, se coloca sobre ésta

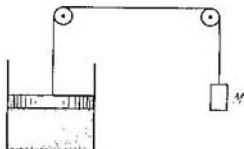


Fig. 2.1.



Fig. 2.2.

una pesa de masa M . ¿Qué masa deberá tener la pesa que habría que añadir para que el volumen del gas disminuyera k veces más por vía isotérmica?

2.40. En un cilindro vertical hay una masa m de gas. El gas está separado de la atmósfera por un émbolo unido con el fondo del cilindro por medio de un muelle cuya rigidez es k (fig. 2.2). A la temperatura T_1 el émbolo se encuentra a la distancia h del fondo del cilindro. ¿Hasta qué temperatura T_2 hay que calentar el gas para que el émbolo se eleve hasta la altura H ? La masa molar del gas es igual a μ .

2.41. En un cilindro, debajo del émbolo sin peso, hay un gas a la presión atmosférica P_0 y la temperatura T_0 . El émbolo se retiene por medio de un muelle elástico (fig. 2.2). ¿Cuántas veces hay que aumentar la temperatura del gas para que su volumen aumente vez y media? Si el gas se extrae por completo de debajo del émbolo, éste se encontrará en equilibrio en el fondo del cilindro.

2.42. Unos recipientes, cuyas capacidades son $V_1 = 200 \text{ cm}^3$ y $V_2 = 100 \text{ cm}^3$, se comunican entre sí por un tubo corto en el cual hay un tabique termoaislante poroso. Mediante este tabique se establecen presiones iguales en los recipientes. El sistema se halla a la temperatura $t_0 = 27^\circ \text{C}$ y contiene gas a la presión $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. ¿Qué presión se establecerá en dicho sistema si el recipiente menor se introduce en hielo a la temperatura $t_2 = 0^\circ \text{C}$ y la mayor, en vapor a la temperatura $t_1 = 100^\circ \text{C}$? Despréciase la dilatación de los recipientes.

2.43. Dos balones, cuyas capacidades son $V_1 = 7 \text{ dm}^3$ y $V_2 = 12 \text{ dm}^3$, comunicados entre sí por un tubo delgado, contienen cierta cantidad de nitrógeno. El primer balón tiene la temperatura invariable $t_1 = 0^\circ\text{C}$. ¿Hasta qué temperatura hay que calentar el segundo balón para que en él quede solamente $1/3$ de la cantidad total de nitrógeno?

2.44. Dos balones, cuyas capacidades son $V_1 = 20 \text{ dm}^3$ y $V_2 = 10 \text{ dm}^3$, comunican entre sí por un tubo delgado y contienen $\nu = 6$ mol de hidrógeno. El primer balón está a la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$. ¿Qué temperatura tiene el segundo balón si se sabe que contiene $m = 9 \text{ g}$ de hidrógeno?

2.45. En dos esferas de vidrio de volúmenes iguales, $V_0 = 1 \text{ dm}^3$, hay aire a la temperatura $t = 0^\circ\text{C}$. Las esferas comunican entre sí por un tubo delgado ($d = 4 \text{ mm}$) suficientemente largo. ¿Qué distancia se desplazará una gota de mercurio que hay en dicho tubo, si una de las esferas se calienta hasta la temperatura $t_1 = 1^\circ\text{C}$ y la otra se enfría hasta la temperatura $t_2 = -1^\circ\text{C}$?

2.46. Tres recipientes iguales, comunicados entre sí por tubos delgados no conductores del calor, se llenan de cierta cantidad de helio gaseoso a la temperatura $T_1 = 4 \text{ K}$. Después el primer recipiente se calienta hasta la temperatura $T_2 = 20 \text{ K}$ y el segundo hasta la temperatura $T_3 = 80 \text{ K}$. La temperatura del tercer recipiente permanece invariable. ¿Cuántas veces aumenta la presión en el sistema?

2.47. Dentro de un cilindro horizontal cerrado por ambos extremos se encuentra un émbolo que se desliza sin rozamiento. Por un lado de este émbolo hay $m_1 = 3 \text{ g}$ de hidrógeno y por el otro, $m_2 = 17 \text{ g}$ de nitrógeno. ¿Qué parte del volumen del cilindro ocupa el hidrógeno?

2.48. Un cilindro vertical, cerrado por ambos extremos, está dividido por un émbolo pesado termoaislante en dos partes: las dos partes del cilindro contienen la misma cantidad de aire. Cuando la temperatura del aire es la misma en ambas partes, $T_1 = 400 \text{ K}$, la presión P_2 en la parte inferior es dos veces mayor que la presión P_1 en la parte superior. ¿Hasta qué temperatura T_2 hay que calentar el aire en la parte inferior para que los volúmenes de las partes superior e inferior se hagan iguales?

2.49. Un cilindro vertical está dividido en dos partes iguales por un émbolo pesado termoaislante que puede deslizarse sin rozamiento. En la mitad superior del cilindro hay hidrógeno a la temperatura T y la presión P , y en la parte inferior, oxígeno a la temperatura $2T$. Si el cilindro se invierte, para que el émbolo siga dividiendo el cilindro en dos partes iguales, hay que enfriar el oxígeno hasta la temperatura $T/2$. La temperatura del hidrógeno sigue siendo la misma que antes (T). Determinar la presión del oxígeno en los casos primero y segundo.

2.50. Los émbolos de dos cilindros iguales están rígidamente unidos entre sí, de manera que los volúmenes que hay debajo de ellos son también iguales. En los cilindros, a la temperatura T , se

introduce aire de manera que la presión en uno de ellos se hace igual a P . Después este cilindro se calienta hasta la temperatura T_1 . ¿Qué presión se establecerá en él? En el otro cilindro se mantiene la temperatura T . La presión atmosférica es igual a P_0 . Desprecíense las masas de los émbolos.

2.51. Los émbolos de dos cilindros iguales están rígidamente unidos entre sí de manera que los volúmenes que hay debajo de ellos son también iguales. Dentro de cada cilindro se ha introducido la

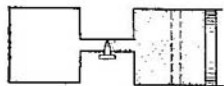


Fig. 2.3.

misma masa de aire a la temperatura T . Después uno de los cilindros se calienta hasta la temperatura T_1 y el otro se mantiene a la temperatura T . ¿Qué presiones habrá en los cilindros? La presión atmosférica es igual a P_0 . Las masas de los émbolos desprecíense.

2.52. Un cilindro, cerrado por un émbolo, se comunica, por medio de un tubo corto, delgado, provisto de llave de paso, con un recipiente del cual se ha extraído el aire (fig. 2.3). Estando cerrada la llave, se introduce debajo del émbolo cierta cantidad de gas v . El volumen que ocupa este gas en el cilindro es igual a la capacidad del recipiente. ¿Qué parte del gas permanecerá en el cilindro después de abrir la llave de paso? La temperatura del gas en el cilindro es $t_1 = -173^\circ\text{C}$, y en el recipiente, $t_2 = 127^\circ\text{C}$.

2.53. Un cilindro, cerrado por un émbolo, se comunica, por medio de un tubo corto, delgado, provisto de llave de paso, con un recipiente del cual se ha extraído el aire (fig. 2.3). La capacidad del recipiente es igual a V . Estando cerrada la llave, debajo del émbolo se introduce gas, que ocupa el volumen $V/2$. Después se abre la llave y la mitad del gas pasa al recipiente. Hallar la relación de las temperaturas del gas en el cilindro y en el recipiente.

2.54. Dos recipientes, cuyas capacidades son $V_1 = 50\text{ dm}^3$ y $V_2 = 12,5\text{ dm}^3$, están unidos entre sí por un tubo provisto de una válvula especial que permite al gas infiltrarse del recipiente mayor en el menor, si la diferencia de presión entre dichos recipientes es mayor que la magnitud $\Delta P = 1,1 \cdot 10^5\text{ Pa}$. En el recipiente mayor se introduce gas a la presión $P_1 = 10^5\text{ Pa}$ y la temperatura $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Cuál será la presión en el recipiente menor (del cual se extrajo previamente el aire), si el sistema se calienta hasta la temperatura $t = 177^\circ\text{C}$?

2.55. Dentro de un cilindro cerrado por ambos extremos, del cual se ha extraído el aire, está suspendido de un muelle un émbolo que se desliza sin rozamiento, cuya posición de equilibrio se encuentra en el fondo del cilindro. Debajo del émbolo se inyecta una cantidad de gas tal, que aquél se eleva a la altura h (fig. 2.4). ¿A qué altura h_1 se establecerá el émbolo si este gas se calienta desde la temperatura inicial T hasta la temperatura T_1 ? La fuerza que actúa por parte del muelle sobre el émbolo es proporcional al desplazamiento de éste.

2.56. Un cilindro cerrado, del cual se ha extraído el aire, se comunica, por medio de un tubo delgado provisto de llave de paso, con un recipiente de capacidad V . Dentro del cilindro está suspendido de un muelle un émbolo que se desliza sin rozamiento, cuya posición de equilibrio se encuentra en el fondo del cilindro. Estando cerrada la llave, debajo del cilindro se inyecta una cantidad de gas tal, que aquél se eleva a la altura h (fig. 2.5). ¿A qué altura h_1 se establecerá el émbolo si se abre la llave? El área de la sección del cilindro es S . La temperatura del gas es constante. La fuerza que por parte del muelle actúa sobre el émbolo es proporcional al desplazamiento de éste.

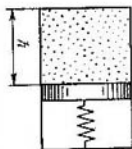


Fig. 2.4.

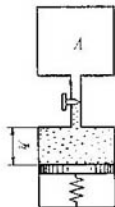


Fig. 2.5.

2.57. En un cilindro, de longitud $2l = 2$ m, el émbolo está unido a los fondos por muelles de igual rigidez $k = 1493$ N/m (fig. 2.6). Al principio se ha extraído del aire en el cilindro y los muelles se hallan en estado relajado. ¿Qué distancia se desplazará el émbolo si en una de las partes del cilindro se inyectan $m = 28$ g de nitrógeno? La temperatura del nitrógeno es $T = 273$ K.

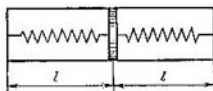


Fig. 2.6.

lle. Al principio el nitrógeno, que llena la parte izquierda del cilindro, y el helio, que llena su parte derecha, están a la misma temperatura T . En estas condiciones el émbolo divide al cilindro por la mitad y ambos muelles están en estado relajado. Cuando el nitrógeno se calienta hasta la temperatura T_1 , ocupa $3/4$ partes del cilindro. ¿A qué temperatura T_2 ocupará el nitrógeno las $7/8$ partes de la longitud del cilindro? La temperatura del helio es igual a T .

2.59. En el diagrama PT (fig. 2.7) se representa el proceso cerrado que realiza cierta masa de oxígeno. Se sabe que el volumen máximo que ocupa el gas en este proceso es $V_{\text{máx}} = 16,4$ dm³. Determinar la masa del gas y su volumen en el punto 1. Los valores de T_1 , T_2 , P_1 y P_2 se indican en la figura.

2.60. En el diagrama VT (fig. 2.8) se representa el proceso cerrado que realiza cierta masa de nitrógeno. Se sabe que la presión mínima

del gas en este proceso es $P_{\min} = 3 \cdot 10^5$ Pa. Determinar la masa del gas y su presión en el punto 1. Los valores de T_1 , T_2 , V_1 y V_2 se indican en la figura.

2.61. En un balón, provisto de llave, hay cierta cantidad de gas a la presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa. Estando abierta la llave, el balón se calienta, después de lo cual se cierra aquélla y el gas se

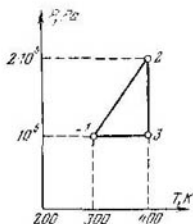


Fig. 2.7.

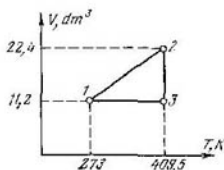


Fig. 2.8.

enfria hasta la temperatura inicial $t_0 = 10^\circ\text{C}$. En este caso la presión en el balón desciende hasta $P = 0,7 \cdot 10^5$ Pa. ¿Qué variación máxima de la temperatura experimenta el balón?

2.62. De un recipiente, cuya capacidad es $V = 10$ dm³, se extrae el aire con una bomba que tiene el rendimiento $V_r = 100$ dm³/min.

¿Qué vacío óptimo puede conseguirse en el recipiente si, debido a una vía de gas, la presión en el mismo se eleva una magnitud $\Delta P = 1$ Torr en el transcurso de $\tau = 1$ h 40 min (con la bomba parada). Suponer que la temperatura del aire en el recipiente permanece invariable.

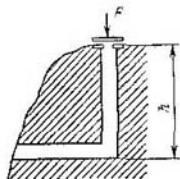


Fig. 2.9.

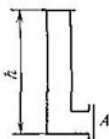


Fig. 2.10.

extraído en la unidad de tiempo del recipiente en que se practica el vacío.

2.63. Un pozo, de profundidad $h = 224$ m, ha sido perforado en la falda de una montaña y tiene salida horizontal (fig. 2.9). La temperatura del aire atmosférico es $t_0 = 0^\circ\text{C}$, y la temperatura media del aire dentro del pozo, $t = 14^\circ\text{C}$. La sección del pozo vertical es $S = 3,5$ m². ¿Qué fuerza habrá que aplicar sobre una tapa sin peso para cerrar el pozo vertical? La presión del aire al nivel del pozo horizontal es $P_0 = 10^5$ Pa.

2.64. La chimenea de una fábrica tiene $h = 22,4$ m de altura. La boca de entrada de la chimenea está cerrada herméticamente por

la compuerta A (fig. 2.10), cuya sección es $S = 1 \text{ m}^2$. La temperatura del aire atmosférico es $t_0 = 0^\circ\text{C}$ y la presión, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Determinar la temperatura media del aire dentro de la chimenea si se sabe que, a causa de la diferencia de temperatura, sobre la compuerta actúa una fuerza $F = 85 \text{ N}$.

2.65. Según el modelo más simple de la atmósfera de Marte, se suponía que el planeta está rodeado de una atmósfera de densidad uniforme cuya altura es $H = 25 \text{ km}$. La temperatura de esta atmósfera en la superficie del planeta es $T = 300 \text{ K}$. ¿Cuál sería en este caso la masa molar del gas atmosférico de Marte? El radio de Marte es $r = 3400 \text{ km}$ y la masa del planeta, $M = 6 \cdot 10^{23} \text{ kg}$. La constante de gravitación universal es $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

2.66. Según el modelo más simple de la atmósfera de Venus, se suponía que dicho planeta está rodeado de una atmósfera formada por anhídrido carbónico. ¿Qué temperatura tendría la atmósfera de Venus en la superficie del planeta si la altura de dicha atmósfera $H = 20 \text{ km}$? El radio de Venus es $r = 6200 \text{ km}$ y la masa del planeta, $M = 5 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. La constante de gravitación universal $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

2.67. La masa M_τ de pólvora que arde en la unidad de tiempo en la cámara de combustión de un motor cohete depende de la presión P , de acuerdo con la ley $M_\tau = AP^n$, en la que A y n son ciertas constantes. La velocidad de salida del gas por la tobera es proporcional a la presión P en la cámara. ¿En cuántas veces se diferencian las presiones en las cámaras de combustión de dos motores cohete si las secciones de sus toberas son S_1 y S_2 ? Considerar el caso en que $n = 2/3$ y $S_1/S_2 = 2$.

2.68. La masa M_τ de pólvora que arde en la unidad de tiempo en la cámara de combustión de un motor cohete depende de la presión P , de acuerdo con la ley $M_\tau = AP^n$. Hallar el exponente de potencia n si cuando la sección de la tobera del motor disminuye dos veces la presión en la cámara aumenta cuatro veces. La velocidad de salida del gas por la tobera es proporcional a la presión P en la cámara.

2.69. En la cámara de combustión de un motor reactor el volumen $V = 0,1 \text{ m}^3$ a la temperatura $T = 2000 \text{ K}$ y la presión $P = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. La velocidad de combustión del carburante $m_\tau = 30 \text{ kg/s}$ y la masa molar media de los productos de la combustión es $\mu = 21 \text{ g/mol}$. Determinar cuánto tiempo permanecerá una porción de carburante en la cámara de combustión.

2.70. Un cilindro de sección $S = 10 \text{ cm}^2$ está cerrado por un émbolo pesado. Si el cilindro se eleva con la aceleración $2g$ el volumen del gas que hay debajo del émbolo disminuye vez y media. Hallar la masa del émbolo considerando constante la temperatura del gas. La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

Mezclas de gases

2.71. Un cilindro de sección $S = 10 \text{ cm}^2$ está cerrado por un émbolo de masa $m = 5 \text{ kg}$. Cuando el cilindro se mueve hacia abajo con la aceleración $4g$ el volumen del gas que hay debajo del émbolo aumenta dos veces. La temperatura del gas no varía. Hallar la presión exterior P_0 .

2.72. Determinar la densidad de una mezcla que contiene $m_1 = 4 \text{ g}$ de hidrógeno y $m_2 = 32 \text{ g}$ de oxígeno a la temperatura $t = 7^\circ \text{C}$ y la presión total $P = 10^5 \text{ Pa}$.

2.73. Unos tubos de láser, de igual capacidad $V_0 = 60 \text{ cm}^3$, deben llenarse de una mezcla de helio y neón en la relación molar $5 : 1$ a la presión total $P_1 = 6 \text{ Torr}$. Se tienen dos balones que contienen igual volumen $V = 2 \text{ dm}^3$ de estos gases. En el balón de helio la presión es $P_1 = 50 \text{ Torr}$ y en el de neón, $P_2 = 200 \text{ Torr}$. ¿Cuántos tubos se pueden llenar?

2.74. Para llenar tubos de láser se utiliza una mezcla de xenón y helio en la relación molar $1 : 9$ a la presión total $P = 10 \text{ Torr}$. Se tiene un balón de xenón de capacidad $V_1 = 1 \text{ dm}^3$ a la presión $P_1 = 300 \text{ Torr}$. ¿Cuántos balones de helio serán necesarios para poder utilizar la totalidad del xenón, si la capacidad de los balones de helio es $V_2 = 2 \text{ dm}^3$ a la presión $P_2 = 50 \text{ Torr}$?

2.75. En un balón, de capacidad $V_1 = 16,4 \text{ dm}^3$, hay una mezcla de oxígeno y nitrógeno cuya masa total $m = 120 \text{ g}$ crea a la temperatura $t_1 = 17^\circ \text{C}$ la presión $P_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La mezcla se hace pasar a través de una trampa que contiene limaduras de cobre incandescentes y se bombea a otro balón, de capacidad $V_2 = 30 \text{ dm}^3$, a la temperatura $t_2 = 87^\circ \text{C}$. ¿Qué presión P_2 habrá en el segundo balón si todo el oxígeno se combina con el cobre?

2.76. En un balón, de capacidad $V = 60 \text{ dm}^3$, hay una mezcla de hidrógeno y oxígeno cuya masa total $m = 60 \text{ g}$ crea a la temperatura $t = 27^\circ \text{C}$ la presión $P = 3,28 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. ¿Qué masa de agua formará esta mezcla si se da al hidrógeno la posibilidad de combinarse con el oxígeno?

2.77. En un balón de acero hay $m_1 = 0,2 \text{ g}$ de hidrógeno y $m_2 = 3,2 \text{ g}$ de oxígeno a la temperatura $t = 27^\circ \text{C}$. El hidrógeno se combina con el oxígeno y, una vez terminada la reacción, la presión dentro del balón aumenta tres veces. ¿Cuál será la temperatura dentro del balón después de la reacción?

2.78. Un recipiente está dividido en dos partes iguales por un tabique semipermeable fijo. En la primera mitad del recipiente se ha introducido una mezcla de argón e hidrógeno a la presión $P = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ y en la segunda mitad se ha hecho el vacío. A través del tabique sólo se puede difundir el hidrógeno. Una vez terminado el proceso de difusión, la presión en la primera mitad resulta ser igual a $P' = 10^5 \text{ Pa}$. Durante el proceso la temperatura se mantuvo constante. Determinar la relación entre las masas del argón y del

hidrógeno en la mezcla que se introdujo inicialmente en la primera mitad del recipiente.

Observación. Se llaman semipermeables los tabiques (membranas) a través de las cuales pueden pasar unas sustancias y otras no. Así, por ejemplo, a través de ciertas películas de origen animal puede pasar el agua, pero el azúcar y otras sustancias orgánicas cuyas moléculas son mayores no pasan. Existen películas polímeras permeables para el helio e impermeables para el hidrógeno. Algunos metales, como el paladio, sólo son permeables para el hidrógeno e impermeables para los demás gases.

Cuando por ambos lados del tabique se establecen (a igualdad de temperaturas) presiones iguales del gas que pasa a través de él, los flujos de gas en ambos sentidos se igualan y se establece el equilibrio dinámico. Los otros gases no pasan a través del tabique y sus presiones parciales y, por consiguiente, las presiones totales por ambos lados del tabique pueden ser distintas.

2.79. Un recipiente, de capacidad $V = 2 \text{ dm}^3$, está dividido en dos partes iguales por un tabique semipermeable fijo. En la primera mitad del recipiente se ha introducido una mezcla de $m_a = 20 \text{ g}$ de argón y $m_h = 2 \text{ g}$ de hidrógeno, y en la segunda mitad se ha hecho el vacío. A través del tabique sólo puede difundirse el hidrógeno. ¿Qué presión se establecerá en la primera mitad del recipiente después de terminar el proceso de difusión? Durante el proceso se mantuvo la temperatura $t = 20^\circ \text{C}$.

2.80. Un recipiente, de capacidad $2V = 200 \text{ cm}^3$, está dividido en dos partes iguales por un tabique semipermeable fijo. En la primera mitad se ha introducido una mezcla de $m_1 = 2 \text{ mg}$ de hidrógeno y $m_{\text{He}} = 4 \text{ mg}$ de helio, y en la segunda mitad se ha hecho el vacío. A través del tabique sólo puede difundirse el helio. Durante el proceso se mantuvo la temperatura $T = 27 \text{ K}$. ¿Qué presiones P_1 y P_2 se establecen en ambas partes del recipiente?

2.81. Un recipiente, lleno de una mezcla de hidrógeno y helio, está separado de otro recipiente, de la misma capacidad que el primero, en el cual se ha hecho el vacío, por un tabique semipermeable fijo que sólo deja pasar libremente las moléculas de helio. Después de establecerse el equilibrio, en el primer recipiente descendió la presión en un 10%. Determinar la relación entre las masas del helio y del hidrógeno. Durante el proceso la temperatura se mantuvo constante.

2.82. Masas iguales de hidrógeno y helio se han introducido en un recipiente, de capacidad V_1 , separado de otro recipiente, de capacidad V_2 , en el cual se ha hecho el vacío, por un tabique semipermeable fijo que sólo deja pasar libremente las moléculas de hidrógeno. Después de establecerse el equilibrio, la presión en el primer recipiente descendió dos veces. Determinar la relación V_2/V_1 . Durante el proceso la temperatura se mantiene constante.

2.83. Un cilindro está dividido en dos partes por un émbolo móvil buen conductor del calor. En el instante inicial a la derecha del émbolo se encuentran $m = 32 \text{ g}$ de oxígeno y a la izquierda, una

mezcla de helio e hidrógeno. El émbolo, que en estas condiciones se encuentra en medio del cilindro, es impermeable para el hidrógeno y el oxígeno, pero permeable para el helio. A través del émbolo empieza la difusión del helio y, como resultado, aquél empieza a desplazarse y, en definitiva, se sitúa a una distancia igual a $1/4$ de la longitud del cilindro (medida desde el fondo izquierdo). Determinar las masas del helio y del hidrógeno que hay en el cilindro.

2.84. Bajo un émbolo pesado, que se desliza sin rozamiento dentro de un cilindro vertical del que se ha extraído el aire, se inyecta una mezcla de hidrógeno y helio, como resultado de lo cual el émbolo se sitúa en la mitad del cilindro. Con el tiempo el émbolo se desplaza hacia abajo, debido a que el material de que está hecho resulta ser permeable solamente para el helio. La posición de equilibrio del émbolo definitiva se encuentra a $1/3$ de la altura del cilindro. ¿Cuál es la relación entre las masas del helio y del hidrógeno en la mezcla?

2.85. Cierta masa de hidrógeno ocupa el volumen $V_1 = 1 \text{ m}^3$ a la presión $P_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ y la temperatura $T_1 = 250 \text{ K}$. ¿Qué presión P_2 tendrá esta misma masa de hidrógeno a la temperatura $T_2 = 5000 \text{ K}$ en el volumen $V_2 = 10 \text{ m}^3$, si a tan alta temperatura las moléculas de hidrógeno se disocian totalmente en átomos?

2.86. En un recipiente hay una mezcla de nitrógeno e hidrógeno. A la temperatura T , en que el nitrógeno está ya totalmente disociado en átomos y la disociación del hidrógeno aún se puede despreciar, la presión en el recipiente es igual a P . A la temperatura $2T$, en que ambos gases están totalmente disociados, la presión en el recipiente es igual a $3P$. ¿Cuál es la relación entre el número de átomos de nitrógeno y de hidrógeno que hay en la mezcla?

2.87. En un recipiente, cuya capacidad es $V = 0,5 \text{ dm}^3$, hay $m = 1 \text{ g}$ de yodo (I_2) en estado de vapor. A la temperatura $t = 1000^\circ\text{C}$ la presión en el recipiente resultó ser $P = 9,33 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Hallar el grado de disociación de las moléculas de yodo (I_2) en átomos de yodo (I) en estas condiciones. La masa molar del I_2 es $\mu = 254 \text{ g/mol}$. Se llama grado de disociación la relación entre el número de moléculas disociadas y el número total de moléculas antes de la disociación.

2.88. En un recipiente, cuya capacidad es $V = 1 \text{ dm}^3$, hay $m = 0,28 \text{ g}$ de nitrógeno. El nitrógeno se ha calentado hasta la temperatura $t = 1500^\circ\text{C}$. A esta temperatura, $\alpha = 30\%$ de las moléculas de nitrógeno se han disociado en átomos. Determinar la presión en el recipiente.

2.89. A la temperatura ambiente el tetróxido de nitrógeno se disocia parcialmente en dióxido de nitrógeno: $\text{N}_2\text{O}_4 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$. En un recipiente de capacidad $V = 250 \text{ cm}^3$, del que previamente se ha extraído el aire, se introducen $M = 0,92 \text{ g}$ de tetróxido de nitrógeno líquido. Cuando la temperatura en el recipiente sube hasta $t = 27^\circ\text{C}$, el líquido se vaporiza totalmente y la presión se hace igual a $P = 129 \text{ kPa}$. ¿Qué masa de tetróxido de nitrógeno se disocia en estas condiciones?

2.90. En un recipiente, cuya capacidad es $V = 1 \text{ dm}^3$, hay $m = 0,2 \text{ g}$ de anhídrido carbónico. A la temperatura $T = 2600 \text{ K}$ cierta parte de las moléculas de CO_2 se disocia en moléculas de óxido de carbono y de oxígeno: $2\text{CO}_2 \rightleftharpoons 2\text{CO} + \text{O}_2$. Con esto la presión en el recipiente resulta ser $P = 108 \text{ kPa}$. Hallar el grado de disociación del CO_2 en estas condiciones.

2.91. Una cantidad $\nu_1 = 1 \text{ mol}$ de anhídrido sulfúrico se echa en un recipiente, se cierra éste y se calienta hasta la temperatura $T_1 = 1000 \text{ K}$, a la cual dicho compuesto se disocia en anhídrido sulfuroso y oxígeno: $\text{SO}_3 = \text{SO}_2 + 0,5 \text{ O}_2$. El grado de disociación del SO_3 en estas condiciones resulta ser $\alpha_1 = 0,2$. Cuando en este mismo recipiente se ponen $\nu_2 = 0,4 \text{ mol}$ de SO_3 , para conseguir la misma presión que en el primer experimento hay que calentar el gas hasta la temperatura $T_2 = 2000 \text{ K}$. Determinar el grado de disociación del SO_3 en el segundo experimento.

2.92. En un recipiente cerrado hay $\nu_1 = 1 \text{ mol}$ de tetróxido de nitrógeno. Se produce su disociación parcial en moléculas de bióxido de nitrógeno: $\text{N}_2\text{O}_4 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$. El grado de disociación resulta ser $\alpha_1 = 0,2$. En el recipiente se establece la presión $P_1 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Cuando en este mismo recipiente se ponen $\nu_2 = 0,5 \text{ mol}$ de tetróxido de nitrógeno, una vez que se establece el equilibrio a la misma temperatura que en el experimento anterior, la presión resulta ser $P_2 = 1,25 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Determinar el grado de disociación del N_2O_4 en el segundo experimento.

Hidroaerostática

2.93. Un estanque con agua, cuya anchura $a = 4 \text{ m}$, está dividido por un tabique. Por un lado del tabique el nivel del agua respecto del fondo es $h_1 = 3 \text{ m}$, por el otro, $h_2 = 1 \text{ m}$. Hallar la fuerza F que actúa sobre el tabique.

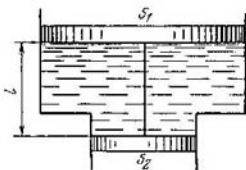


Fig. 2.11.

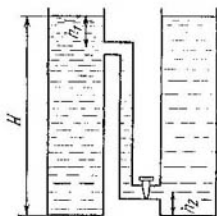


Fig. 2.12.

2.94. Un recipiente dispuesto verticalmente (fig. 2.11), cuyas secciones transversales son S_1 y S_2 , tiene dos émbolos sin peso. Estos émbolos están unidos entre sí por un alambre fino de longitud l .

Hallar la fuerza de tensión T del alambre si el espacio entre los émbolos está lleno de agua. Despréciase el rozamiento. Los extremos del recipiente están abiertos a la atmósfera.

2.95. Dos recipientes de igual sección se comunican por medio de un tubo fino provisto de llave, como muestra la fig. 2.12 ($h_1 = 0.2$ m, $h_2 = 0.02$ m). Al principio el recipiente de la izquierda está lleno de agua y el de la derecha, de aceite de densidad $\rho_2 = 0.8$ g/cm³, hasta la misma altura $H = 1$ m. ¿Cuáles serán los

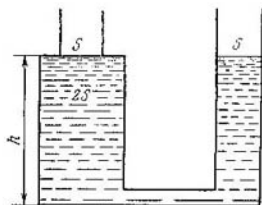


Fig. 2.13.

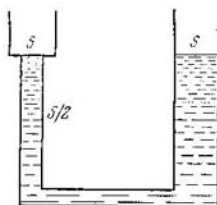


Fig. 2.14.

niveles de las superficies de los líquidos después de abrir la llave? Resolver este mismo problema en el caso en que $h_1 = 0.02$ m.

2.96. En uno de dos vasos comunicantes, llenos de un líquido a la temperatura $t = 20$ °C hasta el nivel $H_0 = 10$ cm, la temperatura del líquido se eleva en la magnitud $\Delta t = 10$ °C. ¿Qué diferencia de niveles se producirá en este caso si el coeficiente de dilatación cúbica del líquido es $\beta = 2,6 \cdot 10^{-3}$ K⁻¹? Despréciase la dilatación del vaso.

2.97. Dos vasos comunicantes están llenos hasta la altura h de un líquido. El vaso de la derecha tiene sección constante S ; el de la izquierda tiene hasta la altura h la sección $2S$ y más arriba de este nivel, la sección S (fig. 2.13). La temperatura del líquido en el vaso de la derecha se mantiene invariable. En el de la izquierda la temperatura se eleva en la magnitud Δt . Determinar el nuevo nivel del líquido en el vaso de la derecha. El coeficiente de dilatación cúbica del líquido es β . La dilatación de los vasos y el volumen del tubo comunicante despréciense.

2.98. Dos vasos comunicantes están llenos hasta la altura h de un líquido. El vaso de la derecha es de sección S constante; el de la izquierda tiene hasta el nivel h la sección $S/2$ y más arriba de este nivel, la sección S (fig. 2.14). La temperatura del líquido en el vaso de la derecha se mantiene invariable. En el vaso de la izquierda la temperatura se eleva en la magnitud Δt . Determinar el nuevo nivel del líquido en el vaso de la derecha. El coeficiente de dilatación

cúbica del líquido es β . La dilatación de los vasos y el volumen del tubo comunicante desprecíense.

2.99. Dos cilindros verticales comunicantes están llenos de agua y tapados con sendos émbolos, cuyas masas respectivas son $M_1 = 1 \text{ kg}$ y $M_2 = 2 \text{ kg}$. En la posición de equilibrio el primer émbolo se encuentra $h = 10 \text{ cm}$ más arriba que el segundo (fig. 2.15). Cuando sobre el primer émbolo se coloca una pesa de masa $m = 2 \text{ kg}$,

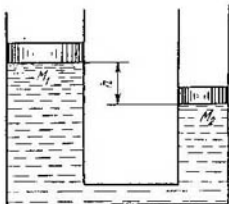


Fig. 2.15.

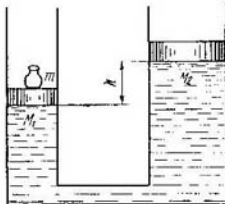


Fig. 2.16.

los émbolos resultan estar en posición de equilibrio a la misma altura. ¿Cómo se situarán los émbolos si la pesa se pone sobre el segundo émbolo?

2.100. Dos cilindros verticales comunicantes están llenos de agua y tapados con sendos émbolos, cuyas masas son $M_1 = 2 \text{ kg}$ y $M_2 = 3 \text{ kg}$. Cuando sobre el primer émbolo se coloca una pesa de masa $m = 1 \text{ kg}$, en la posición de equilibrio resulta estar el primer émbolo $h = 10 \text{ cm}$ más abajo que el segundo (fig. 2.16). Cuando dicha pesa se pone sobre el segundo émbolo, éste resulta estar $h = 10 \text{ cm}$ más abajo que el primero. ¿Cómo estarán situados los émbolos en ausencia de la pesa?

2.101. En un tubo cilíndrico vertical cerrado por abajo con un filtro poroso se encuentra una columna de mercurio de altura $h = 0,1 \text{ m}$. ¿Qué radio tienen los canales del filtro si el mercurio empieza a calarse a través de él cuando sobre su superficie se ejerce una presión adicional $P_0 = 8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$? La tensión superficial del mercurio es $\sigma = 0,465 \text{ N/m}$.

2.102. ¿Cuál será la tensión superficial del agua si con una pipeta, cuyo orificio tiene el diámetro $d = 0,4 \text{ mm}$, se puede dosificar el agua con la exactitud de $0,01 \text{ g}$?

2.103. Una pompa de jabón tiene el radio r . La tensión superficial de la película de jabón es igual a σ . ¿Qué presión adicional hay dentro de la pompa?

2.104. Una gota de mercurio de masa $m = 1 \text{ g}$ se encuentra entre dos láminas de vidrio paralelas. ¿Qué fuerza hay que aplicar a la lámina superior para que el mercurio tome la forma de galleta redonda de radio $r = 5 \text{ cm}$? La tensión superficial del mercurio es $\sigma = 0,465 \text{ N/m}$. Considerar que el mercurio no moja en absoluto

el vidrio, por lo que el ángulo entre la superficie libre de aquél y la lámina de éste es nulo.

2.105. Una gota de agua de masa $m = 0,04 \text{ g}$ se encuentra entre dos láminas de vidrio paralelas que son mojadas perfectamente por aquélla. ¿Cuál será la magnitud de la fuerza de atracción entre las láminas si se encuentran una de otra a la distancia $d = 10^{-4} \text{ cm}$? La tensión superficial del agua es $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$.

2.106. En un platillo que se encuentra en el vacío hay aceite, cuyo vapor tiene una tensión muy baja, que moja bien el vidrio,

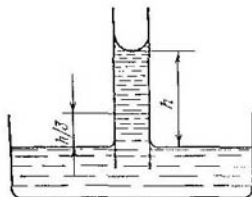


Fig. 2.17.

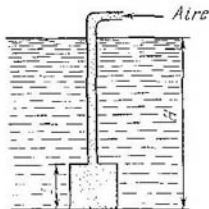


Fig. 2.18.

en el cual se ha sumergido un tubo capilar de vidrio de radio r . Hallar la presión en el aceite a la altura $h/3$ sobre su nivel en el platillo, siendo h la altura a la cual se eleva el aceite en el capilar (fig. 2.17). La tensión superficial del aceite es igual a σ .

2.107. Un balón, de capacidad $V = 50 \text{ dm}^3$, se llena de aire a la temperatura $t = 27^\circ \text{C}$ hasta la presión $P = 100 \text{ atm}$ (10^7 Pa). ¿Qué volumen de agua se puede desalojar de la cisterna de un submarino con el aire de este balón, si el desalojamiento tiene lugar a la profundidad $h = 40 \text{ m}$? La temperatura de todo el aire después de expandirse es $t_1 = 3^\circ \text{C}$.

2.108. En los trabajos subacuáticos se utilizaba antes el llamado cajón neumático («campana de buzo»), tanque, abierto por abajo, al que por medio de un tubo se hacía llegar aire que desplazaba el agua (fig. 2.18). ¿Cuánto tiempo se necesita para desplazar el agua de un cajón sumergido a la profundidad $H = 20 \text{ m}$? El cajón tiene forma cúbica de arista $l = 2 \text{ m}$. El compresor aspira en la unidad de tiempo un volumen $V_r = 1 \text{ m}^3/\text{min}$ de aire atmosférico ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$).

2.109. Un tubo cilíndrico de longitud l se sumerge hasta la mitad en mercurio, se tapa con un dedo y se saca. Al hacer esto parte del mercurio se derrama. ¿Qué longitud tiene la columna de mercurio que queda en el tubo? La longitud de la columna de mercurio correspondiente a la presión atmosférica es igual a H .

2.110. En un tubo en forma de U, cuya longitud es $2L$, soldado por uno de sus extremos, se echa un líquido de manera que en su

rama soldada queda aire. El nivel del líquido en la rama abierta coincide con el borde del tubo. La diferencia entre los niveles es igual a $L/3$ (fig. 2.19). ¿Qué parte del líquido hay que dejar salir por el grifo que se encuentra en la parte inferior del tubo, para que los niveles en las ramas abierta y cerrada se igualen? La presión del vapor del líquido se desprecia. La densidad del líquido es ρ y la presión atmosférica, P_0 .

2.111. Una probeta de longitud L se llena de hidrógeno a la presión P' , se cierra con un émbolo móvil liviano y se sumerge en

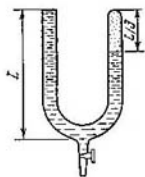


Fig. 2.19.

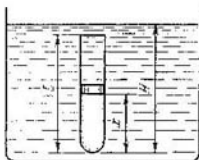


Fig. 2.20.

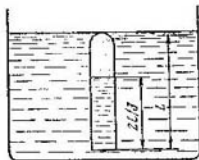


Fig. 2.21.

un recipiente con mercurio hasta la profundidad H (fig. 2.20). ¿Qué parte de la longitud de la probeta estará llena de hidrógeno en estas condiciones? ¿Para qué valores de H tiene solución este problema? La densidad del mercurio es ρ y la presión atmosférica, P_0 . La temperatura del hidrógeno se mantiene invariable.

2.112. Una probeta de longitud L se sumerge en agua hasta que su fondo está al mismo nivel que la superficie de ésta (fig. 2.21). Cuando la temperatura del aire que queda en la probeta se equilibra con la temperatura del agua, resulta que el agua se ha elevado en la probeta hasta la altura $2L/3$. Hallar la temperatura inicial del aire en la probeta. La temperatura del agua es T y la presión atmosférica, P_0 .

2.113. Una probeta de longitud L , que contiene un gas a la temperatura T , se sumerge totalmente en un líquido cuya densidad es ρ , de manera que el fondo de la probeta toca la superficie del líquido. En estas condiciones el líquido llena la mitad de la probeta. Después la probeta se sube hasta que su extremo abierto toca la superficie del líquido. ¿Cómo habrá que variar la temperatura del gas en la probeta para que el líquido vuelva a llenarla hasta la mitad? La presión atmosférica es P_0 .

2.114. En una probeta de altura H y sección S , cerrada por un émbolo sin peso, hay un gas cuya masa molar es μ . El émbolo se baja y la parte de la probeta que queda libre se llena de mercurio hasta los bordes. ¿A qué temperaturas del gas se puede hallar una posición de equilibrio del émbolo tal que el mercurio echado en la probeta no sea desalojado de ella por la presión del gas? La masa del gas que hay en la probeta es m . La presión exterior se desprecia.

2.115. En un tubo en forma de U, soldado por uno de sus extremos, se echa agua. Debido a que en el tubo queda aire, la diferencia de niveles en las ramas del tubo resulta ser igual a h (fig. 2.22). ¿Cómo habrá que variar la temperatura del aire que se encuentra en el tubo para que la diferencia de los niveles del agua en sus ramas se reduzca a la mitad? La presión atmosférica es P_0 . La presión del vapor de agua se desprecia.

2.116. La estructura más simple de un termómetro de máxima, es decir, que «recuerda» la temperatura máxima hasta la cual fue

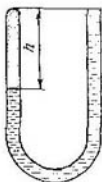


Fig. 2.22.

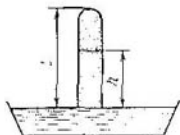


Fig. 2.23

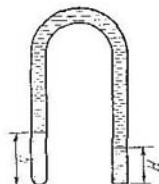


Fig. 2.24.

calentado durante el proceso de un experimento, se representa en la fig. 2.23. Un tubo de ensayo de longitud l se pone en contacto por su extremo abierto con la superficie del mercurio que hay en un recipiente ancho. La temperatura del aire es igual a T_0 y la presión, P_0 . Si el tubo de ensayo se calienta hasta cierta temperatura T y luego se vuelve a enfriar hasta la temperatura T_0 , el nivel del mercurio en el tubo se eleva hasta la altura h . Determinar la temperatura T . Hacer el cálculo numérico para $T_0 = 273 \text{ K}$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $l = 1 \text{ m}$ y $h = 0,1 \text{ m}$. La tensión del vapor de mercurio se desprecia.

2.117. La fig. 2.24 representa la estructura de un termómetro de máxima (véase el problema 2.116). Un tubo largo en forma de U, soldado por uno de sus extremos, se llena de mercurio a la temperatura $T_0 = 273 \text{ K}$. En la rama cerrada, sobre el mercurio, queda una columna de aire cuya altura es $h = 24 \text{ cm}$. Si el aparato se calienta, el aire se expande y desaloja parte del mercurio. Al enfriarse después hasta la temperatura inicial T_0 , el nivel del mercurio en la rama abierta desciende en la magnitud $H \approx 6 \text{ cm}$. Determinar la temperatura hasta la cual se calentó el aparato. La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

2.118. Sobre un líquido de densidad ρ_1 se echa otro de densidad $\rho_2 < \rho_1$ que no se mezcla con el primero. Es evidente que un cuerpo cuya densidad sea ρ ($\rho_1 > \rho > \rho_2$) flotará en el límite de separación entre dichos líquidos. ¿Qué parte del volumen del cuerpo estará sumergida en el líquido más denso?

2.119. En un tarro cilíndrico, cuyo fondo tiene la superficie S , hay agua que forma una columna de altura $H = 15 \text{ cm}$. Cuando en este tarro se introduce una taza de latón, de manera que flote,

el nivel del agua se eleva en la magnitud $h = 2,2$ cm. ¿Cuál será la altura H_1 del nivel del agua en el tarro si la taza se hunde en ella? La densidad del latón es $\rho_1 = 8,8$ g/cm³.

2.120. En un depósito con agua se introduce un tubo largo, de diámetro d , a cuyo extremo inferior se adapta ajustadamente un disco cilíndrico de espesor h y diámetro D (fig. 2.25). La densidad del material del disco ρ_d es mayor que la densidad del agua ρ_a . El tubo se sube lentamente. ¿A qué profundidad H se desprenderá el disco del tubo?

2.121. Un vaso de paredes delgadas, cuya masa $M = 50$ g, se pone boca abajo sobre la superficie del agua y lentamente se va sumergiendo en ella de manera que durante todo el tiempo se mantiene vertical. ¿A qué profundidad mínima habrá que sumergir el vaso para que se hunda? La altura del vaso es $H = 10$ cm y el área de su fondo $S = 20$ cm². La tensión del vapor de agua en el vaso se desprecia. La presión atmosférica $P_0 = 10^6$ Pa.

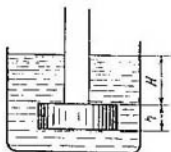


Fig. 2.25.

2.122. Un cilindro de altura $h_1 = 20$ cm y área de la base $S_1 = 100$ cm² contiene un volumen $V = 1$ dm³ de agua. En dicho cilindro se introduce una barra de sección $S_2 = 40$ cm² cuya altura es igual a la del cilindro. ¿Qué masa mínima debe tener la barra para que descienda hasta el fondo del cilindro? Resolver este mismo problema para el caso en que $S_2' = 80$ cm².

2.123. La densidad de una solución de sal varía con la profundidad h según la ley $\rho = \rho_0 + Ah$, en la que $\rho_0 = 1$ g/cm³ y $A = 0,01$ g/cm⁴. En esta solución se introducen dos bolitas unidas entre sí por un hilo cuya longitud no permite que la distancia entre los centros de las bolitas pueda ser mayor que $l = 5$ cm. El volumen de cada bolita es $V = 1$ cm³ y sus masas son $m_1 = 1,2$ g y $m_2 = 1,4$ g. ¿A qué profundidad se encontrará en equilibrio cada una de las bolitas?

2.124. La densidad de una solución de sal varía con la profundidad h según la ley $\rho = \rho_0 + Ah$, en la que $\rho_0 = 1$ g/cm³ y $A = 0,02$ g/cm⁴. En esta solución se introducen dos bolitas unidas entre sí por un hilo. Los volúmenes de las bolitas son $V_1 = 0,1$ cm³ y $V_2 = 0,2$ cm³ y las masas, $m_1 = 0,13$ g y $m_2 = 0,34$ g. La profundidad de inmersión en equilibrio de la primera bolita resulta ser igual a $h_1 = 20$ cm. Determinar la longitud del hilo que une entre sí las bolitas.

2.125. Una vasija soldada que contiene un gas, se pesa dos veces: una a la temperatura $t_1 = 0$ °C y otra a la temperatura $t_2 = 17$ °C. La diferencia entre los resultados es igual a $\Delta m = 0,1$ g. Determinar la capacidad de la vasija. Las pesadas se hicieron a la presión atmosférica ($P_0 = 10^5$ Pa). La dilatación de la vasija se desprecia.

2.126. Una lámina de oro de 0,1 mm de espesor y 8×10 cm²

de superficie se pesa valiéndose de pesas de latón. ¿Qué precisión de la pesada es necesaria para poder apreciar la diferencia en los resultados de la determinación de la masa de la plaquita con la balanza situada en el vacío o en el aire a la presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa y a la temperatura $t = 17^\circ\text{C}$? La densidad del oro es $\rho_1 = 19,3$ g/cm³ y la del latón, $\rho_2 = 9,5$ g/cm³.

2.127. Una pesa de aluminio y otra de latón se equilibran en el aire a la presión $P_0 = 10^5$ Pa y la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$ en una balanza de precisión cuya exactitud es $m_0 = 0,1$ mg. ¿Con qué masa de las pesas se puede apreciar la alteración del equilibrio de la balanza si ésta se coloca en el vacío? La densidad del aluminio es $\rho_1 = 2,7$ g/cm³ y la del latón, $\rho_2 = 8,5$ g/cm³.

2.128. Dentro de la liviana y hermética envoltura de un globo (aeróstato) hay hidrógeno. Determinar la fuerza ascensional del globo. Suponer que la envoltura está hecha de un material no elástico y que puede extenderse libremente. La masa de hidrógeno es igual a m_2 . La masa molar del aire es μ_1 y la del hidrógeno, μ_2 .

2.129. El hidrógeno que contiene un balón de capacidad $V = 100$ dm³ a la presión $P = 10^7$ Pa, se utiliza para llenar globos sonda meteorológicos de envoltura blanda. Cada globo sonda debe tener la fuerza ascensional $F = 20$ N. ¿Cuántos globos pueden llenarse con el hidrógeno de un balón? La temperatura del hidrógeno en el balón y en los globos es igual a la temperatura del aire circundante, $T = 300$ K.

2.130. La capacidad de un globo (aeróstato) es $V = 224$ m³ y la masa de su envoltura, $M = 145$ kg. El globo está lleno de aire caliente a la presión atmosférica normal. ¿Qué temperatura debe tener el aire que hay dentro de la envoltura para que el globo empiece a elevarse? La temperatura del aire fuera de la envoltura es igual a 0°C .

2.131. En uno de los proyectos de dirigible se proponía que el calor que se desprende al funcionar el motor se utilizase para calentar el gas que llena el globo del dirigible. Determinar la fuerza ascensional adicional que se conseguiría en un dirigible cuyo globo tuviera la capacidad $V = 1,3 \cdot 10^6$ m³. El globo estaría lleno de helio. La temperatura se elevaría, a costa del calentamiento, desde $T_1 = 300$ K hasta $T_2 = 400$ K. La presión del gas en ambos casos sería $P_0 = 10^5$ Pa.

2.132. ¿Qué masa de lastre debe tirar un aeróstato, de capacidad $V = 300$ m³, para elevarse desde la altura en la cual el barómetro marca la presión $P_1 = 84$ kPa a la temperatura $T_1 = -15^\circ\text{C}$, hasta la altura en la cual el barómetro marca la presión $P_2 = 66,7$ kPa a la temperatura $T_2 = -30^\circ\text{C}$.

2.133. Para no estorbar el vuelo de las aeronaves, el aeróstato olímpico «Misha» *), lleno de helio a la presión $P_0 = 10^5$ Pa y lo

*) Globo en forma de osito que se elevó desde el estadio polideportivo «Lenin» (erigido en la zona de Luzhnikí) al finalizar los XXII Juegos Olímpicos celebrados en Moscú en 1980.

temperatura $T_0 = 300$ K, debía elevarse sobre Luzhnikí a una altura $h = 1,5$ km, donde la densidad del aire es un 20% menor que en la superficie de la Tierra. Hallar la masa M de la envoltura del aeróstato sabiendo que su capacidad $V = 500$ m³. Dicha envoltura era inextensible y hermética.

2.134. La envoltura esférica de un globo (aeróstato) es de un material cuya densidad superficial es $\sigma = 1$ kg/m² *). El globo está lleno de helio a presión atmosférica normal. ¿Qué radio mínimo debe tener el globo para poder elevarse de por sí? El aire y el helio están a la misma temperatura, igual a 0 °C.

2.135. Un globo sonda hermético, hecho de material inextensible, debe elevar aparatos, cuya masa $M = 10$ kg, a una altura $h = 5,5$ km, en la que la densidad del aire es dos veces menor que en la superficie de la Tierra. El globo se llena de helio a la temperatura $T = 300$ K y la presión $P_0 = 10^5$ Pa. La capacidad del globo es $V = 100$ m³. Determinar la densidad superficial del material de la envoltura del globo.

2.136. Para retener sobre la superficie de la Tierra un globo sonda meteorológico de masa $M = 20$ kg hay que aplicar la fuerza $F = 10^3$ N. El globo se eleva hasta una altura en que su volumen se duplica. La temperatura del aire, medida por medio de la sonda a esta altura, es $t = -43$ °C. Calcular la presión del aire a dicha altura, si en la superficie de la Tierra la presión era $P_0 = 754$ Torr y la temperatura, $t_0 = 17$ °C.

2.137. Un globo sonda, lleno de hidrógeno, tiene envoltura inextensible y hermética de capacidad $V = 50$ m³. La masa del globo con el hidrógeno es $M = 5$ kg. ¿A qué altura máxima puede elevarse el globo sonda, si se sabe que la presión atmosférica se reduce a la mitad cada $h = 5$ km de altura? La temperatura del aire en la estratosfera es $t = -53$ °C y la temperatura del hidrógeno es igual a la del aire circundante.

2.138. La envoltura inextensible de un globo sonda, de capacidad $V = 75$ m³, tiene en su parte inferior un pequeño orificio. La masa de dicha envoltura es $m = 7$ kg. El globo está lleno de hidrógeno. ¿A qué altura máxima puede elevarse el globo sonda, si se sabe que la presión atmosférica se reduce a la mitad cada $h = 5$ km de altura? La temperatura del aire en la estratosfera es $t = -53$ °C y la del hidrógeno es igual a la del aire circundante.

Ley de conservación de la energía en los procesos térmicos

2.139. Una pelotita de ping-pong (tenis de mesa) de radio $r = 15$ mm y masa $m = 5$ g se sumerge en agua a la profundidad $h = 30$ cm y se suelta. La pelotita emerge del agua y salta sobre

*) La densidad superficial de un material es igual a la masa de la unidad de superficie de dicho material.

ella hasta la altura $h_1 = 10$ cm. ¿Qué energía se transforma en calor a causa del rozamiento de la pelotita con el agua?

2.140. Un estanque de superficie $S = 100$ m², lleno de agua hasta el nivel $h = 1$ m, está dividido en dos partes iguales por un tabique. Este tabique se desplaza lentamente hasta que divide el estanque en la relación 1 : 3. ¿Qué trabajo hay que realizar para esto, si el agua no penetra a través del tabique?

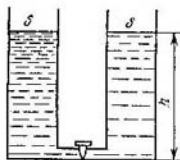


Fig. 2.26.

2.141. Dos recipientes de igual sección $S = 10$ cm², que se comunican entre sí por medio de un tubo delgado provisto de llave (fig. 2.26), se llenan, hasta la altura $h = 1$ m, de líquidos inmiscibles. Las densidades de los líquidos echados en los recipientes

son $\rho_1 = 1$ g/cm³ y $\rho_2 = 2$ g/cm³. Se abre la llave. ¿Qué cantidad de calor se desprende al pasar el sistema al estado de equilibrio?

2.142. Dos cilindros comunicantes, cuyas secciones son $S_1 = 100$ cm² y $S_2 = 200$ cm², están llenos de agua y cerrados por sendos émbolos ligeros. El sistema se encuentra en equilibrio. En estas condiciones, sobre el émbolo mayor se coloca una pesa de masa

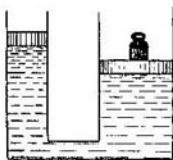


Fig. 2.27.

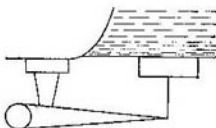


Fig. 2.28.

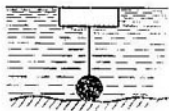


Fig. 2.29.

$m = 1$ kg (fig. 2.27). ¿Qué cantidad de calor se desprende al pasar el sistema a la nueva posición de equilibrio?

2.143. Un pontón de masa $m = 1500$ kg, sección $S = 4$ m² y altura $h = 0,5$ m se pone suavemente sobre el agua con una grúa. En el instante en que el fondo del pontón toca el agua (fig. 2.28), se desengancha el cable. ¿Qué cantidad de calor se desprende al establecerse el equilibrio?

2.144. Un pontón de masa $m = 2000$ kg, sección $S = 4$ m² y altura $h = 1$ m se retiene, por medio de un ancla pesada que descansa en el fondo, en la posición que muestra la fig. 2.29 (la tapa del pontón se halla al nivel de la superficie del agua). El cable que une el pontón con el ancla se desengancha y el pontón emerge. ¿Qué cantidad de calor se desprende al emerger el pontón?

2.145. En un vaso con agua flota un taco de madera de altura L y sección S_1 . Con una aguja fina de hacer punto se hace que dicho taco descienda lentamente hasta el fondo del vaso. ¿Qué trabajo habrá que realizar al hacer esto? La sección del vaso es $S_2 = 2S_1$ y la altura inicial del agua en él, L . La densidad del material del taco es $\rho = 0,5 \rho_0$, siendo ρ_0 la densidad del agua.

2.146. Una bala de plomo atraviesa una pared de madera. Antes de chocar con la pared la velocidad de la bala era $v_0 = 400$ m/s y después de atravesarla, $v = 300$ m/s. La temperatura de la bala antes del choque era $T_0 = 323$ K. ¿Qué parte de la bala se fundiría? El calor (latente) de fusión del plomo es $\lambda = 2,5 \cdot 10^4$ J/kg, la temperatura de fusión $T = 600$ K y el calor específico $c = 125$ J/(kg·K). Suponer que todo el calor que se desprende lo recibe la bala.

2.147. En una cacerola se echa agua fría ($t = 10^\circ\text{C}$) y se pone a calentar sobre un hornillo eléctrico. Al cabo de un tiempo $\tau = 10$ min el agua empieza a hervir. ¿Cuánto tiempo tardará en evaporarse totalmente?

2.148. En un calorímetro cilíndrico, cuyo fondo tiene el área $S = 30$ cm², se echa agua ($V = 200$ cm³) a la temperatura $T_1 = 303$ K y en ella se deposita un trozo de hielo de masa $m = 10$ g, cuya temperatura es $T_0 = 273$ K. Determinar la variación del nivel del agua en el instante en que el hielo se haya fundido, en comparación con el instante en que el hielo ya estaba en el calorímetro. El coeficiente de dilatación cúbica del agua es $\beta = 2,6 \cdot 10^{-3}$ K⁻¹. El calor (latente) de fusión del hielo es $\lambda = 3,2 \cdot 10^6$ J/kg.

2.149. En un cilindro de sección S , bajo un émbolo de masa M , hay una masa m de nitrógeno a la temperatura T y la presión P . ¿Cuál será la fuerza de rozamiento entre el émbolo y la pared del cilindro, si para mover el émbolo se le comunica al gas una cantidad de calor Q ? La presión atmosférica es igual a P_0 , el calor específico del nitrógeno a volumen constante es c_V .

2.150. En un recipiente termoaislado hay vapor de agua saturado. A través del recipiente se hace pasar, por un serpentín, agua fría (fig. 2.30). La temperatura del agua a la entrada es T_0 . Si el agua se hace pasar con la velocidad v_1 , su temperatura a la salida será igual a T_1 . La masa de vapor que se condensa en la unidad de tiempo permanece invariable si el agua se hace pasar con la velocidad v_2 . Determinar la temperatura del agua a la salida en el segundo caso.

2.151. Sobre un hornillo eléctrico de potencia $N = 1$ kW hierve el agua que hay en una tetera. Hallar la velocidad con que sale el vapor por el pitirro de la tetera. El área de la sección del pitirro es $S = 1$ cm². La presión en su extremo es igual a la atmosférica. Suponer que todo el calor que desprende el hornillo se transmite al agua.

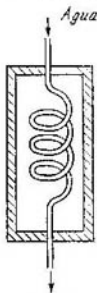


Fig. 2.30.

2.152. Una plancha eléctrica, con el regulador térmico colocado en la posición «lana», se calienta hasta la temperatura $t_1 = 140^\circ\text{C}$. En estas condiciones el regulador conecta la plancha por un tiempo $\tau = 30$ s al cabo de intervalos de tiempo $T_1 = 5$ min. Cuando el regulador está en la posición «lino», la plancha se conecta durante el mismo tiempo $\tau = 30$ s al cabo de períodos de tiempo más cortos $T_2 = 3$ min. Determinar la temperatura t_2 cuando el regulador está colocado en la posición «lino». La dependencia, respecto de la temperatura, de la resistencia del calentador se desprecia. La temperatura ambiente es $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

2.153. Una plancha eléctrica, con el regulador térmico colocado en la posición «algodón», se calienta hasta la temperatura $t_1 = 180^\circ\text{C}$. En estas condiciones el regulador conecta la plancha por un tiempo $\tau = 30$ s al cabo de intervalos de tiempo $T_1 = 4$ min. Cuando el regulador está colocado en la posición «kaprón», la plancha se conecta por tiempos $\tau = 12$ s. ¿Al cabo de qué tiempo T_2 se producen las conexiones si la temperatura de la plancha en este caso es $t_2 = 80^\circ\text{C}$? Despréciase la dependencia, respecto de la temperatura, de la resistencia del calentador. La temperatura ambiente es $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

2.154. En un depósito cerrado de capacidad $V = 10$ dm³ hay una masa $m_0 = 0,1$ g de gasolina. Calcular la presión en dicho depósito después de arder rápidamente la gasolina, si la presión inicial era $P_0 = 10^5$ Pa y la temperatura inicial, $T_0 = 300$ K. La capacidad calorífica molar del gas después de la combustión es $C = 21$ J/(mol $\times$ K). El calor de combustión (poder calorífico) de la gasolina es $q = 4,2 \cdot 10^7$ J/kg.

2.155. En un recipiente hermético de capacidad $V = 5,6$ dm³ hay aire a la presión $P = 10^5$ Pa. ¿Qué presión se establecerá en dicho recipiente si al aire se comunica una cantidad de calor $Q = 1430$ J? La capacidad calorífica molar del aire a volumen constante es $C_V = 21$ J/(mol $\cdot$ K).

2.156. En un recipiente hermético de capacidad $V = 11,2$ dm³ hay aire a la presión $P = 10^5$ Pa. ¿Qué cantidad de calor es necesario comunicar al aire para que la presión en el recipiente se triplique? La capacidad calorífica molar del aire a volumen constante es $C_V = 21$ J/(mol $\cdot$ K).

2.157. En un cilindro de sección $S = 250$ cm² hay $m = 10$ g de nitrógeno comprimido por un émbolo sobre el cual descansa una pesa de masa $M = 12,5$ kg. ¿Qué trabajo realizará este gas si se calienta desde $t_1 = 25^\circ\text{C}$ hasta $t_2 = 625^\circ\text{C}$? ¿Cuánto aumentará en este caso el volumen del gas? La presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa.

2.158. En un cilindro, bajo el émbolo, hay cierta masa de aire. En calentarla a presión constante se gasta la cantidad de calor $Q = 5$ kJ. Hallar el trabajo que realiza el gas en este caso. El calor específico del aire a presión constante es $c_p = 10^3$ J/(kg $\cdot$ K). La masa molar del aire es $\mu = 29$ g/mol.

2.159. En un cilindro, bajo el émbolo, hay cierta masa de hidrógeno a la temperatura $t = 130^\circ\text{C}$, que a la presión $P_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ocupa el volumen $V_1 = 8 \text{ dm}^3$. ¿Cómo variará la temperatura del hidrógeno si, a presión constante, su volumen se disminuye tanto que, al mismo tiempo, se realiza el trabajo $A = 50 \text{ J}$?

2.160. ¿Qué masa de hidrógeno hay en un cilindro, bajo el émbolo, si al calentarlo desde la temperatura $T_1 = 250 \text{ K}$ hasta la temperatura $T_2 = 680 \text{ K}$ el gas realiza el trabajo $A = 400 \text{ J}$?

2.161. ¿Qué cantidad de calor se necesita para calentar $m = 7 \text{ g}$ de nitrógeno desde la temperatura $t_1 = 10^\circ\text{C}$ hasta la temperatura $t_2 = 25^\circ\text{C}$? El nitrógeno se encuentra en un cilindro, bajo el émbolo, sobre el cual descansa una carga constante. La capacidad calorífica molar del nitrógeno a volumen constante es $C_V = 21 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

2.162. En un cilindro, bajo el émbolo, se encuentran $\nu = 0,5 \text{ mol}$ de aire a la temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$. ¿Cuántas veces aumentará el volumen del gas al comunicarle una cantidad de calor $Q = 13,2 \text{ kJ}$?

2.163. En un cilindro, bajo el émbolo, se encuentran $\nu = 2 \text{ mol}$ de aire. Determinar la temperatura inicial del gas si al comunicar a éste la cantidad de calor $Q = 18 \text{ kJ}$ su volumen aumenta 2,5 veces.

2.164. Un recipiente termoaislado, de capacidad $V = 22,4 \text{ dm}^3$ está dividido en dos partes iguales por un tabique delgado impenetrable, conductor del calor. En la primera mitad del recipiente se introducen $m_1 = 11,2 \text{ g}$ de nitrógeno a la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$, y en la segunda, $m_2 = 16,8 \text{ g}$ de nitrógeno a la temperatura $t_2 = 15^\circ\text{C}$. ¿Qué presión se establecerá en cada parte del recipiente una vez que se equilibren las temperaturas?

2.165. Dos recipientes comunicantes por medio de un tubo estrecho están llenos de un mismo gas. La relación de las capacidades de dichos recipientes es $V_1/V_2 = 2$. En el primer recipiente la temperatura inicial del gas era $T_1 = 300 \text{ K}$. Como resultado de la mezcla, las temperaturas se igualan. Hallar la temperatura inicial del gas en el segundo recipiente, si la temperatura final $T = 350 \text{ K}$. Despreciese el intercambio de calor del gas con las paredes.

2.166. En un recipiente cerrado que contiene nitrógeno gaseoso a la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$ y la presión $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, se inyecta cierta cantidad de nitrógeno líquido, que se vaporiza rápidamente, y después de esto la temperatura resulta ser igual a $t_2 = -140^\circ\text{C}$. Se sabe que al inyectar el nitrógeno líquido su temperatura era $t_1 = -196^\circ\text{C}$ (temperatura de ebullición a la presión normal) y que después de calentar el recipiente hasta la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$ se estableció en él la presión $P = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Determinar el calor molar de vaporización del nitrógeno líquido. La capacidad calorífica molar del nitrógeno gaseoso a volumen constante es $C_V = 20,8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

2.167. En un recipiente cerrado que contiene nitrógeno gaseoso a la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$ y la presión $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, se inyecta cierta cantidad de nitrógeno líquido, que se vaporiza rápidamente.

¿Qué presión habría en el recipiente inmediatamente después de vaporizarse el nitrógeno líquido? Se sabe que al inyectar el nitrógeno líquido su temperatura era $t_1 = -196^\circ\text{C}$ (temperatura de ebullición a la presión normal) y que después de calentar el recipiente hasta la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$ se estableció en él la presión $P = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La capacidad calorífica molar del nitrógeno gaseoso a volumen constante es $C_V = 20,8 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$. El calor molar de vaporización del nitrógeno líquido es $q = 5500 \text{ J/mol}$.

2.168. Cierta cantidad de gas se calienta desde la temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ hasta la temperatura $T_2 = 400 \text{ K}$. El volumen del gas varía proporcionalmente a la temperatura. El volumen inicial del gas era $V_1 = 3 \text{ dm}^3$. La presión, medida al final del proceso, resultó ser igual a $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. ¿Qué trabajo realizó el gas en este proceso?

2.169. Un mol de gas perfecto se calienta lentamente de manera que pasa del estado P_0, V_0 al estado $2P_0, 2V_0$. ¿Cómo varía la temperatura del gas en dependencia de su volumen, si la dependencia de la presión del gas respecto del volumen se representa en la gráfica por una línea recta? Determinar el trabajo realizado por el gas en este proceso.

2.170. Si la presión y el volumen de un gas perfecto están relacionados entre sí por la expresión $P = \alpha V$, ¿absorbe o cede calor dicho gas al expandirse? Hallar la cantidad de calor suministrada a un mol de dicho gas (o extraída de él), si en este proceso su temperatura aumentó en una magnitud ΔT , pequeña en comparación con la temperatura inicial del mismo. La capacidad calorífica molar del gas a volumen constante es $C_V = 5R/2$.

2.171. La temperatura de cierta masa m de un gas perfecto cuya masa molar es μ , varía de acuerdo con la ley $T = \alpha V^2$. Hallar el trabajo que realiza dicho gas cuando su volumen aumenta desde V_1 hasta V_2 . ¿Cómo se realiza este proceso, con absorción o con desprendimiento de calor?

2.172. Cierta masa m de un gas perfecto cuya masa molar es μ , se calienta en un cilindro, bajo el émbolo, de manera que su temperatura varía proporcionalmente al cuadrado de la presión ($T \propto P^2$) desde la temperatura inicial T_1 hasta la temperatura final T_2 . Determinar el trabajo que realiza el gas en este proceso.

2.173. El estado de un mol de gas perfecto varía primero según la isobara 1—2 y después según la isocora 2—3 (fig. 2.31). Al mismo tiempo el gas realiza el trabajo A . La relación entre las presiones en los estados 2 y 3 es $P_2/P_3 = k$. Se sabe que la temperatura en el estado final 3 es igual a la temperatura en el estado 1. Determinar esta temperatura.

2.174. El estado de un mol de gas perfecto varía primero según la isocora 1—2 y después según la isobara 2—3 (fig. 2.32). Al ocurrir esto el gas realiza el trabajo A . Se sabe que la temperatura en el estado final 3 es igual a la temperatura en el estado 1. Determinar la relación entre las presiones en los estados 1 y 2.

2.175. Un mol de gas perfecto, que inicialmente se halla en condiciones normales, se hace pasar a un estado en que el volumen y la presión son dos veces mayores. El proceso de transición se compone

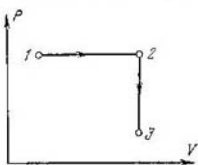


Fig. 2.31.

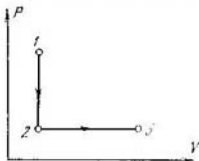


Fig. 2.32.

de dos partes, una isobara y otra isocora. ¿Qué cantidad de calor se habrá suministrado al gas? La capacidad calorífica molar del gas a volumen constante es $C_V = 21 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.

2.176. Un mol de gas perfecto se hace pasar del estado 1 al estado 3 siguiendo la isocora 1—2 y después la isobara 2—3 (fig. 2.33). En la isocora se comunica al gas la misma cantidad de calor $Q = 3675 \text{ J}$ que se desprende en la isobara. Hallar la temperatura final del gas. La temperatura inicial de éste era $t_1 = 27^\circ \text{C}$. La capacidad calorífica molar del gas a volumen constante es $C_V = 21 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.

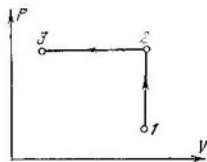


Fig. 2.33.

2.177. Un mol de gas perfecto monoatómico se hace pasar del estado inicial, con temperatura $T = 300 \text{ K}$, a un estado en el cual su temperatura es tres veces mayor y su volumen dos veces menor.

Hallar la cantidad de calor suministrada al gas. Se sabe que de todas las vías de transición del gas del estado inicial al final, en que la presión no desciende más abajo de la inicial, se eligió aquella en la cual sobre el gas se realiza el trabajo mínimo.

2.178. Un mol de gas perfecto biatómico se hace pasar del estado inicial, con temperatura $T = 300 \text{ K}$, a un estado en que su temperatura es tres veces menor y su volumen dos veces mayor. Hallar la cantidad de calor extraída del gas. Se sabe que de todas las vías posibles de transición del gas desde el estado inicial hasta el estado final, en que la presión no excede de la inicial, se eligió aquella en que el gas realiza el trabajo máximo.

2.179. Un mol de gas perfecto se halla en un cilindro, bajo el émbolo, a la temperatura T_1 . El gas se calienta a presión constante hasta la temperatura T_2 , luego, a volumen constante, se calienta hasta la temperatura T_3 . Después el gas se enfría a presión constante, de manera que su volumen desciende hasta el valor inicial. Finalmente, a volumen constante, el gas se hace volver a su estado inicial.

De este modo se consigue que el gas realice un ciclo cerrado. ¿Qué trabajo realiza el gas durante el ciclo?

2.180. Sobre un mol de gas perfecto se realiza un ciclo cerrado consistente en dos isocoras y dos isobaras (fig. 2.34). Las tempera-

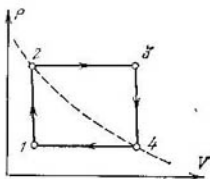


Fig. 2.34.

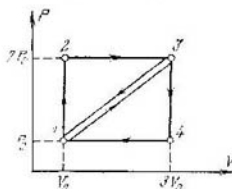


Fig. 2.35.

turas en los puntos 1 y 3 son iguales respectivamente a T_1 y T_2 . Determinar el trabajo que realiza el gas durante el ciclo sabiendo que los puntos 2 y 4 se encuentran en una isoterma.

2.181. En la fig. 2.35 se representan dos ciclos cerrados: 1—2—3—4 y 1—3—4—1. Ambos ciclos han sido realizados por un gas perfecto monoatómico. ¿Cuál de los ciclos tiene mayor rendimiento y cuántas veces es éste mayor?

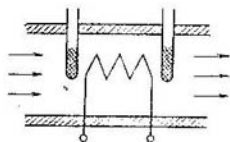


Fig. 2.36.

2.182. En un cilindro vertical térmicamente aislado puede desplazarse un émbolo pesado. En el instante inicial el émbolo está sujeto, en la parte superior del cilindro existe el vacío y la inferior está llena de un gas perfecto. Luego se libera el émbolo. Una vez establecido el equilibrio, el volumen ocupado por el gas resulta ser dos veces menor que el inicial. ¿Qué variación habrá sufrido la temperatura del gas? La capacidad calorífica molar del gas a volumen constante es $C_V = 5R/2$. Despréciase la capacidad calorífica del cilindro.

2.183. En un recipiente térmicamente aislado se ha practicado un vacío profundo. Este recipiente está rodeado por un gas perfecto monoatómico cuya temperatura es T_0 . En cierto instante se abre una llave y el recipiente se llena de gas. ¿Qué temperatura T tendrá el gas en el recipiente después de que éste se haya llenado?

2.184. En un calorímetro de corriente el gas que se investiga se hace pasar por una tubería y se calienta por medio de un calentador eléctrico (fig. 2.36). Se mide la cantidad de gas que pasa por la tubería en la unidad de tiempo y la temperatura de dicho gas antes y después de pasar por el calentador. Determinar la potencia N del calentador. Al pasar el aire por el calorímetro, la temperatura detrás del calentador resultó ser $\Delta T = 5 \text{ K}$ más alta que delante del mismo.

El gasto, en masa, de aire fue $m_T = 720$ kg/h. Suponer que todo el calor desprendido en el calentador fue cedido al gas.

2.185. Una de las causas de que en la atmósfera la temperatura descienda al aumentar la altura es la expansión del aire en los flujos ascendentes sin intercambio calorífico con el medio circundante. Considerando el aire como un gas perfecto, hallar el descenso de temperatura por cada $h = 100$ m de altura.

Vapores saturados y no saturados

2.186. ¿Qué masa de mercurio contiene la unidad de volumen del aire contaminado de mercurio de un local a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$, si la tensión del vapor saturado de mercurio a esta temperatura es $P = 0,15$ Pa? La masa molar del mercurio es $\mu = 200$ g/mol.

2.187. En el apéndice de una vasija cerrada por un émbolo se encuentra cierta masa de agua en equilibrio con vapor saturado. El diámetro de la vasija es $D = 5$ cm y el del apéndice, $d = 2$ mm. Manteniendo la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$, el émbolo se baja una altura $H = 10$ cm; al hacer esto el nivel del agua en el apéndice se eleva una altura $h = 1$ mm (fig. 2.37). Determinar la tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$.

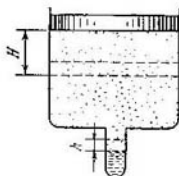


Fig. 2.37.

2.188. En un tubo soldado, de capacidad $V = 0,4$ dm³, hay vapor de agua a la presión $P_1 = 8$ kPa y la temperatura $t_1 = 150^\circ\text{C}$. ¿Qué masa de agua se condensará en las paredes del tubo al enfriar éste hasta la temperatura $t_2 = 22^\circ\text{C}$? La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t_2 = 22^\circ\text{C}$ es $P_2 = 2,5$ kPa.

2.189. En una vasija de capacidad $V = 10$ dm³ se coloca un platillo con $m = 1$ g de agua, se cierra la vasija herméticamente y se deja a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$, a la cual la tensión del vapor de agua saturado es $P = 2,33$ kPa. ¿Qué parte del agua se vaporizará?

2.190. Dentro de un recipiente de capacidad $V = 10$ dm³, cerrado herméticamente y del cual se ha extraído el aire, se encuentra un matraz abierto que contiene $m = 10$ g de agua. El recipiente se calienta a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$. ¿Qué masa de agua se vaporiza?

2.191. Bajo el émbolo de un cilindro de capacidad $V = 10$ dm³ hay $m = 1,9$ g de amoníaco gaseoso. El cilindro se encuentra en un termóstato a la temperatura $t = -57^\circ\text{C}$. ¿Qué masa de amoníaco se condensará al comprimir el gas con el émbolo hasta un volumen $V/2$? La tensión del vapor de amoníaco saturado a la temperatura $t = -57^\circ\text{C}$ es $P = 26,7$ kPa. La masa molar del amoníaco es $\mu = 17$ g/mol.

2.192. Un termo se llena de agua hirviendo y se cierra herméticamente. ¿Qué fuerza será necesaria para (después de enfriarse el termo) sacar el tapón, cuyo diámetro $D = 3$ cm? Despréciase el rozamiento. La tensión del vapor sobre el agua enfriada es pequeña.

2.193. En un cilindro, bajo el émbolo, de sección $S = 100$ cm², hay $m = 18$ g de agua a la temperatura $t_0 = 0$ °C (fig. 2.38). El cilindro se calienta hasta la temperatura $t = 200$ °C. ¿Qué altura se elevará el émbolo, con la carga de masa $M = 100$ kg que hay sobre él? La presión atmosférica es $P_0 = 10^5$ Pa. La tensión del vapor saturado a la temperatura $t = 200$ °C es $P_s = 1,6 \cdot 10^5$ Pa.



Fig. 2.38.

2.194. ¿A qué altura máxima de una montaña se puede cocer un huevo en una cacerola abierta? La clara se cuaja a la temperatura $t = 80$ °C. La tensión del vapor de agua saturado varía un 10% cuando la temperatura cambia en la magnitud $\Delta t = 2,5$ °C. La presión atmosférica varía un 10% por cada $\Delta h = 700$ m de elevación.

2.195. Un recipiente cerrado de capacidad $V = 20$ dm³ está dividido por un tabique móvil delgado en dos partes iguales. En la parte izquierda hay agua ($v_a = 1$ mol) y en la derecha, nitrógeno ($v_n = 0,5$ mol). La temperatura se mantiene igual a $t = 100$ °C. Determinar la capacidad de la parte derecha del recipiente.

2.196. Un recipiente cerrado de capacidad $V = 120$ dm³ está dividido por un tabique móvil delgado en dos partes. En la parte izquierda hay agua ($v_a = 2$ mol) y en la derecha, nitrógeno ($v_n = 1$ mol). La temperatura se mantiene igual a $t = 100$ °C. Determinar la capacidad de la parte derecha del recipiente.

2.197. En un cilindro cerrado de capacidad $V = 1$ dm³ se mueve libremente un émbolo delgado sin peso. En el espacio de debajo del émbolo se introduce $m_a = 1$ g de agua y en el espacio de encima de él, $m_n = 2$ g de nitrógeno. ¿Qué parte de la capacidad del cilindro ocupará el nitrógeno a la temperatura $t = 100$ °C?

2.198. En un recipiente que tiene un orificio pequeño, a la temperatura $t_1 = 76$ °C se echa un poco de agua, cuyo vapor saturado a esta temperatura tiene la tensión $P = 4 \cdot 10^4$ Pa. El recipiente se cierra y se sumerge en aire líquido, que hierve a la temperatura $T_2 = 80$ K. ¿Cuál será la presión en el recipiente? La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $T_2 = 80$ K se desprecia. La presión atmosférica es $P_0 = 10^5$ Pa.

2.199. En un cilindro vertical, bajo un émbolo de masa $M = 10$ kg, hay cierta cantidad de aire, agua y vapor de agua a la temperatura $t = 100$ °C. En la posición de equilibrio el émbolo se encuentra a la distancia $h = 20$ cm del fondo del cilindro. Al colocar el cilindro en posición horizontal el émbolo ocupa una nueva posición de equilibrio, desplazándose una distancia $\Delta h = 3$ cm de su posición inicial. ¿Qué masa de agua había en el fondo del cilindro? La super-

ficio del émbolo es $S = 400 \text{ cm}^2$. La presión atmosférica, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

2.200. En un recipiente, de capacidad $V = 10 \text{ dm}^3$, lleno de aire seco a la presión $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ y la temperatura $t = 0^\circ \text{C}$, se introducen $m = 3 \text{ g}$ de agua. El recipiente se calienta hasta la temperatura $t = 100^\circ \text{C}$. ¿Cuál será la presión del aire húmedo en el recipiente a esta temperatura?

2.201. En una cámara, de capacidad $V = 1 \text{ dm}^3$, en comunicación con el aire a la temperatura $t = 20^\circ \text{C}$ y la presión $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, se echa un trocito de hielo seco de masa $m = 0,5 \text{ g}$. La cámara se cierra herméticamente al instante. Determinar la presión en la cámara una vez establecido el equilibrio a temperatura invariable. La tensión del vapor saturado de anhídrido carbónico a la temperatura $t = 20^\circ \text{C}$ es $P_s = 5,65 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

2.202. En un recipiente, de capacidad $V = 10 \text{ dm}^3$, hay aire y una pequeña cantidad de agua. A la temperatura $t_0 = 27^\circ \text{C}$, a la cual la tensión del vapor de agua saturado es $P_{s0} = 3,6 \text{ kPa}$, la presión en el recipiente es igual a la atmosférica ($P_0 = 100 \text{ kPa}$). El recipiente está cerrado por una válvula de superficie $S = 1 \text{ mm}^2$ retenida por un muelle cuya fuerza es $F = 0,1 \text{ N}$. Dicho recipiente se calienta lentamente y, a la temperatura $t = 95^\circ \text{C}$, cuando aún no se ha vaporizado toda el agua, la válvula se abre. ¿Cuál es la tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 95^\circ \text{C}$? El volumen del agua, en comparación con la capacidad del recipiente, es despreciable.

2.203. En un recipiente, de capacidad $V = 10 \text{ dm}^3$, hay aire y $m = 3,5 \text{ g}$ de agua. A la temperatura $t_0 = 7^\circ \text{C}$, a la cual la tensión del vapor de agua saturado es insignificante, la presión en el recipiente es igual a la atmosférica ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$). El recipiente está cerrado por una válvula de superficie $S = 1 \text{ mm}^2$ retenida por un muelle cuya fuerza es $F = 0,1 \text{ N}$. Dicho recipiente se calienta lentamente. ¿A qué temperatura se abrirá la válvula, si se sabe que en el instante de la apertura toda el agua se transforma en vapor?

2.204. La humedad relativa del aire que llena un recipiente, de capacidad $V = 0,7 \text{ m}^3$, a la temperatura $t = 24^\circ \text{C}$ es $\alpha = 60\%$. ¿Qué masa de agua habrá que vaporizar en esta capacidad hasta que el vapor esté totalmente saturado? La tensión del vapor de agua saturado a esta temperatura es $P = 3 \text{ kPa}$.

2.205. En un recipiente de capacidad $V = 100 \text{ dm}^3$, a la temperatura $t = 30^\circ \text{C}$, hay aire cuya humedad relativa es $\alpha_1 = 30\%$. ¿Cuál será la humedad relativa α_2 , si en el mismo recipiente se introduce $m = 1 \text{ g}$ de agua? La tensión del vapor de agua saturado a esta temperatura es $P = 4,24 \text{ kPa}$.

2.206. Se mezclan $V_1 = 1 \text{ m}^3$ de aire cuya humedad relativa es $\alpha_1 = 20\%$ y $V_2 = 2 \text{ m}^3$ de aire con humedad relativa $\alpha_2 = 30\%$. Ambas porciones de aire se toman a igual temperatura. La mezcla ocupa el volumen $V = 3 \text{ m}^3$. Determinar la humedad relativa.

2.207. La temperatura del aire que hay en una habitación es

$t_1 = 14^\circ\text{C}$ y su humedad relativa, $\alpha_1 = 60\%$. En la habitación se enciende una estufa y la temperatura del aire se eleva hasta $t_2 = 22^\circ\text{C}$. En este caso una parte del aire, con el vapor de agua contenido en ella, salió al exterior y la presión en la habitación no cambió. Determinar la humedad relativa del aire a la temperatura $t_2 = 22^\circ\text{C}$. La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t_1 = 14^\circ\text{C}$ es $P_1 = 1,6\text{ kPa}$ y a la temperatura $t_2 = 22^\circ\text{C}$ es $P_2 = 2,67\text{ kPa}$.

2.208. En un cilindro, de capacidad $V_1 = 10\text{ dm}^3$, bajo el émbolo, hay aire húmedo a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ y la presión $P_1 = 13,3\text{ kPa}$. La humedad relativa del aire es $\alpha = 70\%$. ¿Cuál será la presión P_2 en el cilindro si, a la misma temperatura, disminuye 10 veces su capacidad? La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ es $P = 2,4\text{ kPa}$.

2.209. ¿Cuál será la humedad relativa del aire que hay bajo un émbolo a la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$ y la presión $P_1 = 10^5\text{ Pa}$, si la condensación del agua de este aire a la temperatura $t_2 = 100^\circ\text{C}$ empezó a la presión $P_2 = 6 \cdot 10^8\text{ Pa}$? La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$ es $P = 2,33 \cdot 10^3\text{ Pa}$.

2.210. Un globo de goma se infla con la boca en una habitación a la temperatura $t_1 = 22^\circ\text{C}$. ¿Cuánto variará el volumen del globo si se saca a la calle, donde la temperatura es $t_2 = 1^\circ\text{C}$? Suponer que el vapor de agua que hay en el globo se encuentra en estado saturado. La tensión del vapor saturado a la temperatura $t_1 = 22^\circ\text{C}$ es $P_1 = 20\text{ Torr.}$ y a la temperatura $t_2 = 1^\circ\text{C}$ es $P_2 = 5\text{ Torr.}$ La presión atmosférica es $P_0 = 10^5\text{ Pa}$. Despréciase la presión de las paredes de goma del globo.

2.211. En un tubo horizontal, soldado por un extremo, hay aire, cuya humedad relativa $\alpha_1 = 0,6$, separado de la atmósfera por una columna de mercurio de altura $l = 3,8\text{ cm}$. ¿Cuál será la humedad relativa α_2 , si el tubo se coloca verticalmente con el extremo abierto hacia arriba? La temperatura se mantiene constante. La presión atmosférica es $P_0 = 760\text{ Torr.}$

2.212. En un recipiente, de capacidad $V = 500\text{ cm}^3$, del que previamente se ha extraído el aire, se introduce hidrógeno hasta la presión $P_H = 266\text{ hPa}$ a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$. En otro recipiente, igual que el primero, se introduce oxígeno hasta la presión $P_O = 133\text{ hPa}$ a la misma temperatura. Ambos recipientes se ponen en comunicación y, una vez que los gases se mezclan, se hace saltar una chispa eléctrica y la mezcla detonante arde. ¿Qué masa de agua se condensará en las paredes del recipiente cuando el dispositivo adquiera la temperatura inicial? La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ es $P = 23\text{ hPa}$.

2.213. Una cámara de explosión se llena de una mezcla de oxígeno e hidrógeno a la temperatura $T_1 = 300\text{ K}$ y la presión $P_1 = 10^6\text{ Pa}$. Las presiones parciales del oxígeno y del hidrógeno en la cámara son iguales. Después de cerrar herméticamente dicha cámara se produce la explosión. Hallar la presión en la cámara una vez que los produc-

tos de la reacción se enfrían hasta la temperatura $T_2 = 373 \text{ K}$.

2.214. Una cámara de explosión se llena de una mezcla de metano y oxígeno a la temperatura ambiente y la presión $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$. Las presiones parciales del metano y del hidrógeno en la cámara son iguales. Después de cerrar herméticamente dicha cámara se produce una explosión. En la cámara se desarrolla la reacción $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$. Hallar la presión dentro de la cámara cuando los productos de la reacción se enfrían hasta la temperatura inicial, a la cual la tensión del vapor de agua saturado es $P = 23 \text{ hPa}$.

2.215. En un cilindro hay un tabique fijo a ambos lados del cual se encuentran émbolos móviles (fig. 2.39). La parte izquierda del

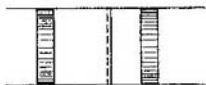


Fig. 2.39



Fig. 2.40.

cilindro contiene $1/2$ mol de nitrógeno y $1/2$ mol de hidrógeno, y la derecha, 1 mol de agua. La temperatura del sistema es $t = 100^\circ \text{C}$. El tabique es permeable al hidrógeno o impermeable a los demás gases. Determinar la capacidad V de la parte izquierda del cilindro una vez que se establezca el equilibrio. La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

2.216. En un cilindro hay un tabique fijo a ambos lados del cual se encuentran dos émbolos móviles (fig. 2.40). La parte izquierda del cilindro contiene 1 mol de hidrógeno y 1 mol de nitrógeno, y la derecha, 3 mol de agua. La temperatura del sistema es $t = 100^\circ \text{C}$. El tabique es permeable al hidrógeno e impermeable a los demás gases. Determinar la fuerza F que hay que aplicar al émbolo de la derecha para mantenerlo en la posición en que la capacidad de la parte derecha del cilindro es $V = 81,6 \text{ dm}^3$. La sección del cilindro es $S = 1000 \text{ cm}^2$. La presión atmosférica, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

2.217. ¿Cuándo es mayor (y cuántas veces) la densidad del vapor de agua en la atmósfera, después de un mes de lluvias duraderas con nieve húmeda en noviembre, a la temperatura $t_1 = 0^\circ \text{C}$ y la humedad relativa $\alpha_1 = 95\%$, o después de un mes de calor seco en julio, a la temperatura $t_2 = 35^\circ \text{C}$ y la humedad relativa $\alpha_2 = 40\%$? La tensión del vapor saturado a $t_1 = 0^\circ \text{C}$ es $P_1 = 4,6 \text{ Torr}$, y a $t_2 = 35^\circ \text{C}$, $P_2 = 42 \text{ Torr}$.

2.218. ¿Cuántas veces mayor es la densidad del vapor de agua debajo de la tapadera de una cacerola en la cual hierve caldo grasiento, que la densidad del vapor de aceite? La tensión del vapor de aceite saturado a la temperatura $t = 100^\circ \text{C}$ es $P_{\text{ac}} = 120 \text{ Pa}$. La masa molar del aceite, $\mu_{\text{ac}} = 80 \text{ g/mol}$.

2.219. La cocción de los alimentos en la olla o marmita de presión se efectúa a la temperatura $t = 120^\circ \text{C}$. A esta temperatura

la tensión del vapor de agua saturado es $P = 2 \cdot 10^5$ Pa. ¿Cuántas veces mayor es la densidad del vapor en estas condiciones que sobre la superficie del agua que hierve en una cacerola abierta?

2.220. La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 36^\circ\text{C}$ es $P = 44,6$ Torr. Determinar la densidad del aire con humedad relativa $\alpha = 80\%$ a dicha temperatura y a la presión $P = 760$ Torr.

2.221. Determinar la relación entre las densidades del aire seco y del aire con la humedad relativa $\alpha = 50\%$. Ambas porciones se toman a la presión atmosférica ($P_0 = 10^5$ Pa) y a la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$. La relación entre las masas molares del vapor y del aire es $\mu_v/\mu_a = 0,6$. La tensión del vapor de agua saturado a dicha temperatura es $P = 23$ hPa.

2.222. Dos globos sonda de igual capacidad $V = 1$ m³ se llenan de aire a la temperatura $T = 373$ K y la presión $P_0 = 10^5$ Pa. Las fuerzas ascensionales de los globos, uno de los cuales está lleno

de aire seco y el otro de aire húmedo, se diferencian en la magnitud $\Delta F = 0,72$ N. Determinar la humedad relativa del aire en el segundo globo.

2.223. Una pieza, hecha de aluminio, se pesa en una balanza de precisión valiéndose de pesas de latón. Una vez se pesa en aire seco y otra, en aire húmedo siendo la tensión del vapor de agua

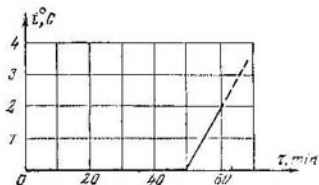


Fig. 2.41.

$P_s = 15,2$ Torr. La presión ($P_0 = 760$ Torr) y la temperatura ($t = 20^\circ\text{C}$) permanecen constantes en ambos casos. ¿Qué masa debe tener la pieza para que pueda apreciarse la diferencia en las indicaciones de la balanza, si la precisión de ésta es $m_0 = 0,1$ mg? La densidad del aluminio es $\rho_1 = 2,7$ g/cm³, y la del latón, $\rho_2 = 8,5$ g/cm³.

2.224. En un cubo hay una mezcla de agua con hielo. La masa de la mezcla es $m = 10$ kg. El cubo se introduce en una habitación e inmediatamente se empieza a medir la temperatura de la mezcla. La gráfica obtenida de la dependencia $t(\tau)$ se muestra en la fig. 2.41. El calor específico del agua es $c = 4200$ J/(kg·K) y el calor latente de fusión del hielo $\lambda = 3,2 \cdot 10^5$ J/kg. ¿Qué masa de hielo había en el cubo cuando éste se introdujo en la habitación? La capacidad calorífica del cubo se desprecia.

2.225. En un cilindro, bajo el émbolo, hay vapor de agua a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ y la presión $P_0 = 10^5$ Pa. El volumen inicial del vapor es $V = 20$ dm³. A presión atmosférica constante el émbolo se baja de tal modo que el volumen del vapor se reduce a la mitad. ¿Qué cantidad de calor hay que extraer del cilindro para que la temperatura del vapor siga siendo la misma que antes? El

volumen del agua que se condensa se desprecia. El calor latente de vaporización del agua a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ es $q = 2,26 \times 10^6 \text{ J/kg}$.

2.226. En un cilindro, bajo un émbolo sin peso cuya superficie es $S = 100 \text{ cm}^2$, hay una masa $M = 1 \text{ kg}$ de agua a la temperatura $t = 0^\circ\text{C}$. En el cilindro se conecta un calentador de potencia $N = 500 \text{ W}$. ¿Al cabo de cuánto tiempo se elevará el émbolo una altura $h = 1 \text{ m}$? La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. El calor latente

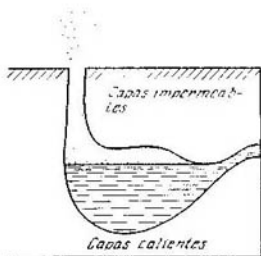


Fig. 2.42.

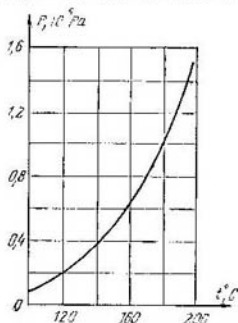


Fig. 2.43.

de vaporización del agua, $q = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$. La capacidad calorífica del cilindro y la pérdida de calor se desprecian. El calor específico del agua $c = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$.

2.227. En un cilindro, bajo un émbolo sin peso cuya superficie es $S = 100 \text{ cm}^2$, hay $m = 18 \text{ g}$ de vapor de agua saturado. En el cilindro se inyectan $M = 18 \text{ g}$ de agua a la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$. ¿Qué altura descendiendo del émbolo? La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. La capacidad calorífica del cilindro y la pérdida de calor se desprecian.

2.228. En un cilindro, bajo un émbolo sin peso, hay $V = 1 \text{ m}^3$ de vapor de agua saturado. ¿Qué masa de agua a la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$ habrá que inyectar en el cilindro para que todo el vapor se condense? La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. La capacidad calorífica del cilindro y la pérdida de calor se desprecian.

2.229. En un cilindro, bajo un émbolo sin peso, hay $M_1 = 1 \text{ kg}$ de agua a la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$. En el agua se echa un trozo de hierro, de masa $M_2 = 1 \text{ kg}$, calentado hasta la temperatura $t = 1100^\circ\text{C}$. ¿A qué altura se elevará el émbolo? La presión atmosférica es $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. El calor específico del hierro es $c = 500 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$. La superficie del émbolo, $S = 1000 \text{ cm}^2$. La capacidad calorífica del cilindro y la pérdida de calor se desprecian.

2.230. La cocción de los alimentos en una olla de presión se efectúa a la temperatura $t = 108\text{ }^{\circ}\text{C}$ y a presión elevada. ¿Qué parte del agua se evapora cuando se deshermetiza la olla? El calor específico del agua es $c = 4200\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ y el calor latente de vaporización de la misma, $q = 2,26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$. El intercambio de calor mientras se establece el equilibrio se desprecia.

2.231. Los géiseres pueden considerarse como grandes depósitos subterráneos llenos de agua del subsuelo calentada por el calor terrestre (fig. 2.42). La salida de ellos a la superficie de la tierra se efectúa por un conducto estrecho que durante el período «pasivo» está prácticamente lleno de agua. El período «activo» comienza cuando el agua empieza a hervir en el depósito subterráneo; durante la erupción el conducto está lleno solamente del vapor que sale lanzado hacia fuera. Calcular qué parte del agua pierde el depósito del géiser durante cada erupción. La profundidad del conducto es $h = 90\text{ m}$, el calor latente de vaporización del agua, $q = 2,26 \times 10^6\text{ J/kg}$ y el calor específico de ésta, $c = 4200\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$. La gráfica de la tensión del vapor de agua saturado en función de la temperatura se da en la fig. 2.43.

Elementos de física molecular y atómica *)

2.232. La red cristalina del hierro a la temperatura ambiente es cúbica centrada en el cuerpo. Los átomos de hierro se encuentran en los vértices del cubo y en su centro, es decir, en el punto de intersección de las diagonales espaciales del cubo (fig. 2.44). ¿Cuántos

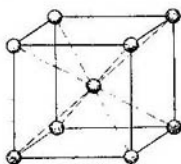


Fig. 2.44

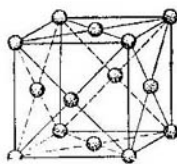


Fig. 2.45

átomos de hierro corresponden a una celdilla elemental? Determinar la constante de la red (arista del cubo) a y la distancia mínima entre los átomos de hierro. La masa atómica del hierro es $A = 55,9$ y su densidad, $\rho = 7,87\text{ g/cm}^3$.

*) En todos los problemas de este párrafo deben considerarse conocidas la constante de Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$, la constante universal (molar) de los gases $R = 8,31\text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$ y la constante de Boltzmann $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$.

2.233. La red cristalina del aluminio es cúbica centrada en las caras. Los átomos de aluminio se encuentran en los vértices del cubo y en los centros de las caras (fig. 2.45). ¿Cuántos átomos de aluminio corresponden a una celdilla elemental? Determinar la constante de la red (arista del cubo) a y la distancia mínima entre los átomos de aluminio. La masa atómica del aluminio es $A = 27,0$ y su densidad, $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$.

2.234. ¿Con qué velocidad aumenta el espesor del recubrimiento de plata de una pared al metalizarla por pulverización, si los átomos de dicho metal, poseyendo la energía $E = 10^{-17} \text{ J}$, ejercen sobre la pared la presión $P = 0,1 \text{ Pa}$? La masa atómica de la plata es $A = 108$ y su densidad, $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$.

2.235. ¿Cuántas moléculas de mercurio hay en el volumen $V = 1 \text{ cm}^3$ de aire, en un local contaminado de mercurio, a la temperatura $t = 30^\circ \text{C}$, si la tensión del vapor de mercurio a esta temperatura es $P = 0,75 \text{ Pa}$?

2.236. Hallar la distancia media entre las moléculas del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 100^\circ \text{C}$.

2.237. En una habitación, cuya capacidad $V = 60 \text{ m}^3$, se evapora una gotita de perfume que contiene $m = 10^{-4} \text{ g}$ de sustancia aromática. ¿Cuántas moléculas de dicha sustancia aromática penetrarán en los pulmones de una persona en cada aspiración? El volumen de aire aspirado es $V_a = 1 \text{ dm}^3$. La masa molar de la sustancia aromática es $\mu = 1 \text{ kg/mol}$.

2.238. Al hacer explosión una bomba atómica ($M = 1 \text{ kg}$ de plutonio ^{242}Pu) se obtiene una partícula radiactiva por cada átomo de plutonio. Suponiendo que los vientos mezclan uniformemente estas partículas en toda la atmósfera, calcular el número de partículas radiactivas que habrá en un volumen $V = 1 \text{ dm}^3$ de aire en la superficie de la Tierra. El radio de la Tierra es $R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$.

2.239. ¿Cuántos electrones hay en un volumen $V = 1 \text{ dm}^3$ de oxígeno a la presión $P = 10^6 \text{ Pa}$ y la temperatura $t = 200^\circ \text{C}$?

2.240. En un recipiente del cual se ha extraído el aire y cuya capacidad $V = 1 \text{ dm}^3$ hay $m = 1 \text{ g}$ de hidruro de uranio (UH_3). Al calentarlo hasta la temperatura $t = 400^\circ \text{C}$ el hidruro de uranio se descompone totalmente en uranio e hidrógeno. Hallar la presión del hidrógeno en el recipiente a esta temperatura. La masa atómica del uranio es $A = 238$.

2.241. En un recipiente, cuya capacidad es $V = 1 \text{ dm}^3$, había $m = 1 \text{ g}$ de tritio (isótopo del hidrógeno de masa atómica $A = 3$) a la temperatura $t = 27^\circ \text{C}$. En el transcurso de 12 años la mitad de los núcleos de tritio se han transformado en núcleos de helio. Hallar la presión en el recipiente al final de dicho plazo.

2.242. Se sabe que $M = 1 \text{ g}$ de radio en un tiempo $t = 1 \text{ s}$ produce $N_r = 3,7 \cdot 10^{10}$ núcleos de helio. ¿Cuál será la presión del helio que se forma en una ampolla hermética, de capacidad $V = 1 \text{ cm}^3$, en la cual se encuentran durante un año $m = 100 \text{ mg}$ de radio? La temperatura de la ampolla es $t = 15^\circ \text{C}$.

2.243. Si el litio (${}^7\text{Li}$) se bombardea con protones, se transforma en helio (${}^4\text{He}$). Determinar el volumen de helio que se forma de 1 g de litio, si el helio al final del experimento tiene la temperatura $t = 30^\circ\text{C}$ y la presión $P = 9,3 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

2.244. En cierto instante un contador de radiación ionizante situado cerca de un preparado de ${}^{18}\text{F}$ (cuyo período de semidesintegración es pequeño) registra 100 cuentas por segundo. Al cabo de un tiempo $\tau = 22 \text{ min}$ las indicaciones disminuyen hasta 87 cuentas por segundo. Determinar el período de semidesintegración del ${}^{18}\text{F}$.

2.245. Una ampolla con preparado radiactivo ${}^{24}\text{Na}$ (con período de semidesintegración $\tau_{1/2} = 15 \text{ h}$) se enfría con una corriente de aire. Al comenzar el experimento el aire se calentaba 2°C . ¿Al cabo de cuánto tiempo el aire de refrigeración de la ampolla se calentará $1,8^\circ\text{C}$?

2.246. En un microcalorímetro, cuya capacidad calorífica $C = 100 \text{ J/K}$, se coloca $m_0 = 1 \text{ mg}$ de un isótopo del silicio (de masa atómica $A = 31$). Al desintegrarse el núcleo de ${}^{31}\text{Si}$ se desprende la energía $Q = 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ J}$. El período de semidesintegración del isótopo del silicio es $\tau_{1/2} = 2 \text{ h } 36 \text{ min}$. ¿Cuánto se elevará la temperatura del calorímetro al cabo de un tiempo $\tau = 52 \text{ min}$ de haber comenzado el experimento.

2.247. En un microcalorímetro, cuya capacidad calorífica $C = 1000 \text{ J/K}$, se colocan $m = 10 \text{ mg}$ de un isótopo del cobalto (de masa atómica $A = 61$). Al desintegrarse el núcleo ${}^{61}\text{Co}$ se desprende la energía $Q = 2 \cdot 10^{-10} \text{ J}$. Al cabo de un tiempo $\tau = 50 \text{ min}$ la temperatura del calorímetro se elevó en la magnitud $\Delta T = 0,06 \text{ K}$. Calcular el período de semidesintegración del isótopo del cobalto.

2.248. Un satélite artificial, cuya sección $S = 1 \text{ m}^2$, se mueve con la primera velocidad cósmica $v = 7,9 \text{ km/s}$ por una órbita alrededor de la Tierra. La presión del aire a la altura de la órbita ($h = 200 \text{ km}$) es $P = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ y la temperatura $T = 1226 \text{ K}$. Determinar el número de choques del satélite con las moléculas de aire en la unidad de tiempo.

2.249. Calcular la longitud del recorrido libre de las moléculas en el aire en condiciones normales. El diámetro de la molécula es $d = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

2.250. Entre las dobles paredes de la botella de un termo, de capacidad $V = 1 \text{ dm}^3$, se ha hecho el vacío hasta la presión $P = 1 \text{ Pa}$ (a la temperatura ambiente). Calcular el tiempo que tarda en enfriarse el té contenido en dicho termo desde 90 hasta 70°C . El área de la superficie de la botella es $S = 600 \text{ cm}^2$. La pérdida de calor a través del tapón no se tiene en cuenta.

2.251. Una cavidad térmicamente aislada se comunica por medio de dos orificios pequeños iguales, con dos recipientes que contienen helio gaseoso (fig. 2.46). La presión del helio en estos recipientes se mantiene igual a P y la temperatura es igual a T en uno de ellos y a $2T$ en el otro. Determinar la presión y la temperatura que se establece dentro de la cavidad.

2.252. El uranio natural es una mezcla de dos isótopos, de números másicos 235 y 238, cuya relación de distribución es $\alpha_0 = 0,007$. Para aumentar la concentración de ^{235}U , que se utiliza en los reactores atómicos, se emplea la salida de hexafluoruro de uranio (UF_6) en el vacío a través de pequeños orificios. El gas se hace pasar por el tubo T , cuyas paredes son porosas (fig. 2.47). El gas que ha pasado a través de las paredes del tubo se extrae del recipiente R . Calcular el aumento de la concentración de ^{235}U en el recipiente R después de dicha extracción. Para los fines técnicos se requiere enriquecer el uranio hasta altas concentraciones de ^{235}U . Con este fin el hexafluoruro

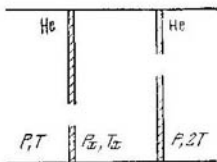


Fig. 2.46.

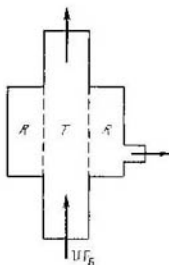


Fig. 2.47

de uranio que sale del recipiente R se envía a la siguiente cascada de enriquecimiento, de igual estructura que la primera. Calcular el número de cascadas necesario para obtener $\alpha_1 = 0,05$ y $\alpha_2 = 99$.

2.253. En la actualidad es posible (por ejemplo, por medio de una radiación láser enfocada de un modo especial) alcanzar presiones con las cuales las dimensiones lineales de un sólido se pueden hacer diez veces menores. Esto da la posibilidad de efectuar microexplosiones, lo que se considera como una de las vías posibles de obtener la reacción termonuclear controlada. ¿Cuántas veces menores serán el volumen crítico y la masa crítica de esta sustancia «superdensa» que los de la ordinaria? En el estado crítico, cuando empieza la reacción en cadena, el número de neutrones secundarios que se generan en la sustancia es igual al número de neutrones que la abandonan a través de la superficie (se llaman secundarios los neutrones que surgen en las interacciones, con la sustancia físil, de los neutrones que ya hay en ella).

III. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Electrostática

3.1. ¿Qué carga Q adquiriría una esfera de cobre de radio $R = 10$ cm, si se consiguiera extraer de ella todos los electrones de conducción? La masa atómica del cobre $A = 64$ y su densidad $\rho = 8,9$ g/cm³. La carga del electrón es $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C *), la constante de Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹. Considerar que a cada átomo de cobre corresponde un electrón de conducción.

3.2. ¿Con qué fuerza F se atraerán dos bolitas iguales de plomo, de radio $r = 1$ cm, situadas a la distancia $R = 1$ m una de otra, si a cada átomo de la primera bolita se quita un electrón y todos estos electrones se trasladan a la segunda bolita? La masa atómica del plomo $A = 207$ y su densidad $\rho = 11,3$ g/cm³.

3.3. N gotitas esféricas de mercurio, iguales, se cargan hasta un mismo potencial V . ¿Cuál será el potencial V' de la gota grande que se obtiene como resultado de la unión de estas gotitas?

3.4. Una esfera metálica se carga de una máquina de electróforo con ayuda de una placa que, después de cada contacto con la esfera, se vuelve a cargar de la máquina hasta la carga Q . Determinar la carga máxima de la esfera, si su carga después del primer contacto es igual a q .

3.5. Dos pequeñas esferas conductoras cargadas, de radio r , están situadas a la distancia R una de otra. Estas esferas se conectan por turno a tierra durante cierto tiempo. Determinar el potencial de la esfera que se conectó primeramente a tierra, si la carga inicial de cada esfera era q .

3.6. Dos pequeñas esferas conductoras cargadas, de radio r , están situadas a la distancia R una de otra. Estas esferas se conectan por turno a tierra durante cierto tiempo. Determinar la carga que queda en la esfera que se conectó a tierra en segundo lugar, si inicialmente cada esfera tenía el potencial V .

3.7. Una esfera metálica de radio R_1 , con potencial V_1 , se rodea con una envoltura esférica conductora de radio R_2 . ¿A qué será igual el potencial de la esfera si dicha envoltura se conecta a tierra?

3.8. Una esfera metálica de radio R_1 , con potencial V_1 , se rodea con una envoltura esférica conductora de radio R_2 sin carga. ¿Cómo varía el potencial de la esfera después de estar durante cierto tiempo conectada con la envoltura?

3.9. Un condensador plano, cuyas placas tienen las dimensiones 25×25 cm² y están separadas entre sí por la distancia $d_1 = 0,5$ mm

*) Aquí y en los problemas siguientes se entiende por carga del electrón $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C su magnitud absoluta, igual a la carga del protón. En aquellos casos en que el signo de la carga del electrón desempeña un papel importante, en la fórmula debe pensarse la magnitud $-e$. Por ejemplo, la energía del electrón en un campo con potencial V es $-eV$; la fuerza que actúa sobre el electrón en un campo de intensidad E es $-eE$ y así sucesivamente.

está cargado hasta una diferencia de potencial $V_1 = 10 \text{ V}$ y desconectado de la fuente. ¿Cuál será la diferencia de potencial V_2 si las placas se separan hasta la distancia $d_2 = 5 \text{ mm}$?

3.10. Hallar la carga en cada uno de los condensadores de capacidad C_1 , C_2 y C_3 cuyo esquema de acoplamiento se da en la fig. 3.1. La f.e.m. de la batería es igual a $\mathcal{E}$.

3.11. En el esquema representado en la fig. 3.2, la capacidad de la batería de condensadores no varía cuando se cierra el interruptor K . Determinar la capacidad del condensador C_x .

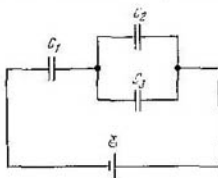


Fig. 3.1.

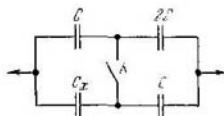


Fig. 3.2.

3.12. Hallar la diferencia de potencial entre los puntos a y b en el circuito representado en la fig. 3.3.

3.13. Hallar la diferencia de potencial entre los puntos a y b en el circuito representado en la fig. 3.4.

3.14. Dos condensadores planos de igual capacidad C_0 se cargan hasta la diferencia de potencial V_0 y se unen. En uno de los conden-

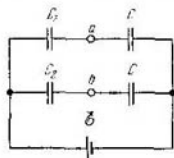


Fig. 3.3.

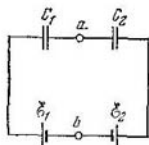


Fig. 3.4.

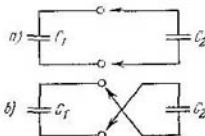


Fig. 3.5.

ladores se aumenta tres veces la distancia entre las placas. Hallar las cargas de los condensadores y la diferencia de potencial en ellos.

3.15. Dos condensadores planos, cuyas capacidades son C_1 y C_2 y poseen las cargas q_1 y q_2 , se conectan en un circuito cerrado de manera que la placa cargada positivamente de uno de los condensadores se une a la placa cargada negativamente del otro. Determinar la carga de cada condensador en este caso.

3.16. Un condensador de capacidad C_1 se carga de una batería con f.e.m. $\mathcal{E}$ y se conecta a un condensador descargado cuya capacidad es C_2 (fig. 3.5, a). Después el condensador C_2 se desune del C_1

y se vuelve a unir, pero ahora se conectan entre sí las placas con cargas de signos distintos de los condensadores C_1 y C_2 (fig. 3.5, b). Determinar la diferencia de potencial en los condensadores.

3.17. Un condensador de capacidad C_1 se conecta, por medio del conmutador K , primero con una batería de f.e.m. $\mathcal{E}$ y después, con un condensador sin carga de capacidad C_2 (fig. 3.6). Hallar la carga q_2 que aparece en el condensador C_2 .

3.18. Un condensador de capacidad $C_0 = 20 \mu\text{F}$ se carga hasta la diferencia de potencial $V_0 = 400 \text{ V}$ y se conecta a otro conden-

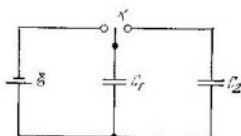


Fig. 3.6.

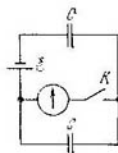


Fig. 3.7.

sador cuya capacidad es $C = 1 \mu\text{F}$, el cual, como resultado de esto, se carga. Este condensador se desconecta y, por el mismo procedimiento se carga un segundo condensador de la misma capacidad

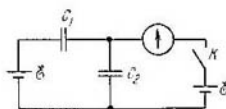


Fig. 3.8.

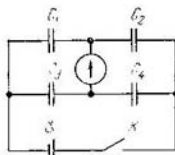


Fig. 3.9.

($C = 1 \mu\text{F}$), después un tercero y así sucesivamente. Luego los condensadores se acoplan en serie. ¿Qué diferencia de potencial máxima se puede conseguir de este modo?

3.19. ¿Qué carga Q pasará por el galvanómetro después de cerrar el interruptor K en el circuito representado en la fig. 3.7? La f.e.m. de la batería es $\mathcal{E}$, y la capacidad de cada condensador, igual a C .

3.20. ¿Qué carga pasará por el galvanómetro después de cerrar el interruptor K en el circuito representado en la fig. 3.8?

3.21. ¿Qué carga pasará por el galvanómetro en el circuito representado en la fig. 3.9, si se cierra el interruptor K ?

3.22. En una de las placas de un condensador plano de capacidad C hay una carga $+q$ y en la otra, una carga $+4q$. Hallar la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

3.23. Dos condensadores planos, de aire, con placas iguales, tienen cargas iguales. La distancia entre placas de uno de los con-

densadores es dos veces mayor que entre las del otro. ¿Cómo varía la diferencia de potencial entre las placas del primer condensador, si el segundo condensador se coloca dentro del primero como muestra la fig. 3.10, a? ¿Cómo variará si el segundo condensador se coloca dentro del primero como indica la fig. 3.10, b?

3.24. En el espacio entre las armaduras de un condensador plano sin carga se introduce una placa metálica que tiene la carga Q , de

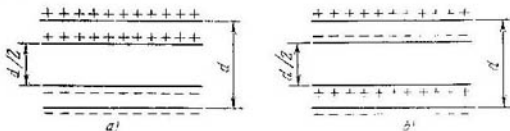


Fig. 3.10.

manera que entre dicha placa y las armaduras del condensador quedan los espacios l_1 y l_2 (fig. 3.11). Las áreas de la placa y de las armaduras del condensador son idénticas e iguales a S . Determinar la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

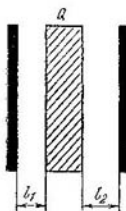


Fig. 3.11.

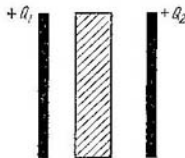


Fig. 3.12.



Fig. 3.13.

3.25. En un condensador plano una armadura tiene la carga $+Q_1$ y la otra, la carga $+Q_2$. Dentro del condensador, y paralela a las armaduras, se coloca una placa metálica sin carga (fig. 3.12). ¿Qué carga se inducirá en las superficies izquierda y derecha de la placa?

3.26. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a iguales distancias d una de otra (fig. 3.13). El área de cada una de las placas es igual a S . La placa 1 está unida por medio de un conductor con la placa 3, y de las placas 2 y 4 se han hecho bornas. Determinar la capacidad de este condensador complejo. La distancia d entre las placas es pequeña en comparación con las dimensiones de éstas.

3.27. Cuatro placas metálicas iguales se encuentran en el aire a distancias iguales d una de otra (fig. 3.14). El área de cada una de

las placas es igual a S . Las placas extremas están unidas entre sí, y las de en medio, conectadas con una batería de f.e.m. $\mathcal{E}$. Hallar las cargas de las placas de en medio. La distancia d entre las placas es pequeña en comparación con las dimensiones de éstas.



Fig. 3.14.

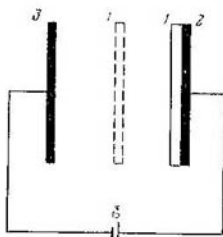


Fig. 3.15.

3.28. Una plaquita metálica delgada 1 está en contacto directo con la armadura 2 del condensador 2 - 3 (fig. 3.15), de capacidad C , de manera que entre la plaquita 1 y la armadura 2 existe contacto eléctrico. Luego la plaquita 1, con la carga que hay en ella, se coloca en medio de las armaduras 2 y 3. Determinar las cargas de las armaduras 2 y 3. La f.e.m. de la batería es igual a $\mathcal{E}$.

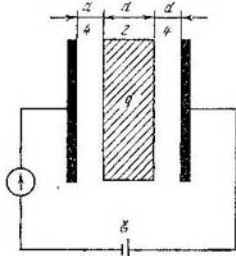


Fig. 3.16.

3.29. Un condensador plano, de aire, está conectado a través de un galvanómetro con una fuente de f.e.m. constante. Dentro del condensador, paralela a sus armaduras, se encuentra una placa metálica portadora de la carga q (las dimensiones geométricas se indican en la fig. 3.16). En estas condiciones la carga del condensador resulta ser igual a $q/2$. ¿Qué carga pasará por el galvanómetro si se produce un cortocircuito entre la

placa metálica y la armadura derecha del condensador?

3.30. En un condensador plano, de aire, a una de sus armaduras se acerca, hasta ponerla en contacto con ella, una lámina de mica ($\epsilon = 7$) de espesor $d_1 = 0,3$ mm. Determinar la capacidad C del condensador. El área de las armaduras del condensador es $S = 2000$ cm² y la distancia entre ellas, $d = 0,5$ mm.

3.31. Un condensador plano, de aire, cuyas placas están colocadas horizontalmente, se llena hasta la mitad de un dieléctrico

líquido de permitividad ϵ . ¿Qué parte del condensador hay que llenar con este mismo dieléctrico cuando las placas están colocadas verticalmente, para que en ambos casos la capacidad sea la misma?

3.32. Un condensador de aire de capacidad C_0 se llena de un dieléctrico de permitividad ϵ . ¿Qué capacidad debe tener el condensador que hay que conectar en serie con el dado, para que la batería formada por ellos vuelva a tener la capacidad C_0 ?

3.33. Un condensador plano, con las placas horizontales, está conectado a una batería de f.e.m. $\mathcal{E}$ y colocado en una cubeta que paulatinamente se va llenando de keroseno ($\epsilon = 2$). Escribir en forma de fórmulas y representar gráficamente la dependencia de la intensidad del campo y del potencial en el centro del condensador respecto de la capa de keroseno h que hay dentro de él. La distancia entre las placas del condensador es igual a d .

3.34. Si un condensador esférico de aire se conecta con una fuente de alta tensión, dicho condensador se perfora cuando la diferencia de potencial $V_0 = 40$ kV. Determinar la rigidez eléctrica del aire en las condiciones del experimento *). El radio de la armadura interna del condensador es $r = 3$ cm y el de la armadura externa, $R = 9$ cm.

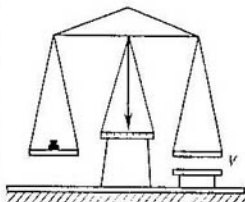


Fig. 3.17.

3.35. El radio de la armadura externa de un condensador esférico de aire es $R = 4$ cm y el de la armadura interna r se elige de manera que el condensador no se perfora con la diferencia de potencial mayor posible. Determinar la diferencia de potencial máxima V_0 . La rigidez eléctrica del aire es $E_0 = 3 \cdot 10^4$ V/cm.

3.36. La armadura interna de un condensador esférico, de aire, cuyo radio es $r = 2$ cm, está rodeada de una capa esférica de dieléctrico de permitividad $\epsilon = 2$. El radio exterior de la capa de dieléctrico es $R = 4$ cm. ¿Qué carga máxima puede comunicarse a este condensador? La rigidez eléctrica del aire, igual a la del dieléctrico, es $E_0 = 30$ kV/cm.

3.37. Calcular la densidad espacial ρ de las cargas eléctricas en la atmósfera, sabiendo que la intensidad del campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra es $E_0 = 100$ V/m, y a la altura $h = 1$ km es dos veces menor. Considerar que las cargas eléctricas están distribuidas uniformemente en la atmósfera hasta la altura h .

3.38. La placa inferior de un condensador plano, de aire, colocado horizontalmente, sin carga, está sujeta y la superior suspendida de la cruz de una balanza (fig. 3.17). La balanza está en equilibrio cuando la distancia entre las placas es $d = 1$ mm. ¿Cómo habrá que

*) Se llama rigidez eléctrica la intensidad E_0 del campo eléctrico con la cual se produce la perforación del dieléctrico.

variar la carga sobre el segundo platillo de la balanza, para conservar el equilibrio con la misma distancia entre las placas, si el condensador se carga hasta la diferencia de potencial $V = 1000$ V? El área de las placas del condensador es $S = 50$ cm².

3.39. Una placa de un condensador plano de aire está sujeta fijamente. La otra pende de un muelle cuya rigidez es k . El área de las placas es igual a S . ¿Cuánto se alargará el muelle si al condensador se le comunica la carga Q ?

3.40. En el espacio entre las armaduras de un condensador plano, de aire, en el cual se mantiene constante la diferencia de potencial, se introduce una lámina dieléctrica de permitividad $\epsilon = 3$. ¿Cómo varía la fuerza de interacción electrostática entre las armaduras del condensador? El espesor de la lámina es igual a la mitad de la distancia entre las armaduras del condensador.

3.41. Un condensador plano, de aire, se llena de keroseno ($\epsilon = 2$) y se carga, comunicándole la energía U_1 . Luego el condensador se desconecta de la fuente, se vacía el keroseno y se descarga. ¿Qué energía se desprende en la descarga?

3.42. Las diferencias de potencial en unos condensadores de capacidad C_1 y C_2 son iguales a V_1 y V_2 . Los condensadores se acoplan entre sí. Hallar la energía que se desprende al recargar los condensadores en los dos casos siguientes: a) cuando están unidas las armaduras con carga de igual signo; b) cuando están unidas las armaduras con carga de signos distintos.

Ley de Ohm. Leyes de la electrólisis *)

3.43. Dos circuitos eléctricos están formados por las resistencias conocidas R y $2R$ y la resistencia desconocida r (fig. 3.18). ¿Con qué valor de r serán iguales las resistencias de ambos circuitos medidas entre los puntos A y B , y cuál será en este caso la resistencia total R_{AB} ?

3.44. Para regular la tensión de carga se ha montado el circuito que muestra la fig. 3.19. La resistencia de carga y la resistencia

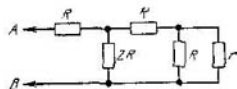
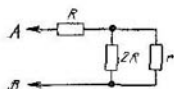


Fig. 3.18.

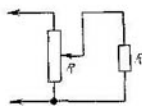


Fig. 3.19.

total del potenciómetro de regulación son idénticas entre sí e iguales a R . La resistencia está conectada a la mitad del potenciómetro. ¿Qué parte de la resistencia del potenciómetro debe conectarse a la resistencia de carga para que la tensión en él se haga dos veces mayor?

*) En todos los problemas de este capítulo la resistencia de los conductores de conexión, si no se da en las condiciones del problema, debe despreciarse.

3.45. Para determinar el punto en que se ha deteriorado el aislamiento de una línea telefónica bifilar de longitud $L = 4$ km, a uno de sus extremos se conecta una batería cuya f.e.m. es $\mathcal{E} = 15$ V. En estas condiciones resulta que, si los conductores están desconectados en el otro extremo de la línea, la corriente que pasa por la batería es $I_1 = 1$ A, y, si los conductores se cortocircuitan, dicha corriente es $I_2 = 1.8$ A. Hallar el punto en que se encuentra el deterioro y la resistencia del aislamiento en dicho punto. La resistencia de la unidad de longitud del conductor es $\rho = 1,25 \Omega/\text{km}$. La resistencia de la batería se desprecia.

3.46. A uno de los extremos de una línea bifilar de transmisión de energía eléctrica está conectada una fuente de f.e.m. continua y al otro, un consumidor de resistencia R_0 . En la línea se produce

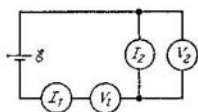


Fig. 3.20.

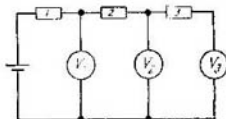


Fig. 3.21.

un deterioro del aislamiento como resultado del cual la corriente que pasa por la fuente aumenta dos veces y la que pasa por la resistencia R_0 disminuye ocho veces. Hallar la resistencia del aislamiento en el lugar del deterioro, si la longitud de cada conductor de la línea es igual a L y la resistencia de la unidad de longitud del conductor es ρ .

3.47. En el circuito de un galvanómetro está conectado un par termoelectrónico formado por alambres de cobre y de constantán de diámetro $2a = 0,2$ mm y de longitud $l = 1$ m cada uno. La sensibilidad del galvanómetro es $i_0 = 10^{-6}$ A por división de la escala y su resistencia interna es $r = 50 \Omega$. ¿Cuántas divisiones de la escala se desviará la aguja del galvanómetro si la temperatura de la soldadura del par termoelectrónico se aumenta 50°C respecto de la temperatura ambiente? La f.e.m. del par por unidad de temperatura es $\mathcal{E}_0 = 40 \mu\text{V/K}$, la resistencia del constantán, $\rho_1 = 0,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ y la del cobre, $\rho_2 = 0,17 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$.

3.48. En un circuito están conectados dos microamperímetros y dos voltímetros iguales (fig. 3.20). Las indicaciones de los microamperímetros son $I_1 = 100 \mu\text{A}$ y $I_2 = 99 \mu\text{A}$, y la del voltímetro $V_1 = 10$ V. Hallar lo que indica el voltímetro V_2 .

3.49. Un circuito está montado con resistencias iguales y voltímetros también iguales (fig. 3.21). Las indicaciones de los voltímetros primero y tercero son respectivamente $V_1 = 10$ V y $V_3 = 8$ V. Hallar lo que indica el segundo voltímetro V_2 .

3.50. Un galvanómetro de sensibilidad igual a $3 \cdot 10^{-6}$ A por división de la escala y resistencia interna $r_1 = 20 \Omega$, conectado en el circuito de un par termoelectrónico, marca una desviación de 11 divisiones de la escala. Otro galvanómetro de sensibilidad igual a 5×10^{-6} A por división de la escala y de resistencia interna $r_2 = 30 \Omega$, conectado en lugar del primero, marca una desviación de 5 divisiones de la escala. Determinar la resistencia R del par y su f.e.m. $\mathcal{E}$.

3.51. A un galvanómetro con resistencia $r = 290 \Omega$ se acopló un shunt que disminuía 10 veces la sensibilidad del galvanómetro.

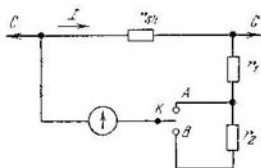


Fig. 3.22.

¿Qué resistencia hay que conectar en serie con el galvanómetro shuntado para que la resistencia total permanezca invariable?

3.52. Se dispone de un aparato cuyas divisiones tienen el valor $i_0 = 10 \mu\text{A}$. Su escala consta de $n = 100$ divisiones y la resistencia interna es $r = 50 \Omega$. ¿Cómo se puede hacer de este aparato un voltímetro con límite de medida de la tensión $V_0 = 200 \text{ V}$ o un mili-

amperímetro con límite de medida de la intensidad de la corriente $I_0 = 800 \text{ mA}$?

3.53. Para medir grandes corrientes en un circuito CC (fig. 3.22) se utiliza un shunt de resistencia r_{sh} en paralelo con el cual y a través de las resistencias $r_1 = 2 \Omega$ y $r_2 = 90 \Omega$ se conecta el galvanómetro. En la posición A del conmutador K toda la escala del aparato corresponde a una corriente $I_1 = 40 \text{ A}$, en el circuito CC , y en la posición B , a una corriente $I_2 = 100 \text{ A}$, en el mismo circuito. Hallar la resistencia interna del galvanómetro.

3.54. Acoplando a un voltímetro cierta resistencia adicional, aumenta n veces el límite de medida de las tensiones. Otra resistencia adicional aumenta m veces el límite de medida. ¿Cuántas veces aumentará la tensión límite medible por el voltímetro si se conectan en serie con él estas dos resistencias acopladas entre sí en paralelo?

3.55. Cuando se conecta un shunt de resistencia $r_{sh} = 100 \Omega$ en paralelo con un aparato de medida, la aguja de éste se desvía hasta el final de la escala cuando la corriente en el circuito externo es $I' = 3 \text{ A}$. Si se conecta una resistencia adicional $R_0 = 300 \Omega$ al galvanómetro no shuntado, la escala del aparato se hace cuatro veces menos sensible que sin la resistencia adicional y el shunt. ¿Qué resistencia del shunt hay que tomar para que la aguja del aparato se desvíe hasta el final de la escala cuando la corriente en circuito externo sea $I = 7,5 \text{ A}$?

3.56. Hallar la corriente que pasa por el puente ab en el circuito representado en la fig. 3.23. Las resistencias del puente, de los conductores de alimentación y la interna de la batería se desprecian.

3.57. Hallar la tensión en los condensadores C_1 y C_2 en el circuito representado en la fig. 3.24, sabiendo que si la resistencia R se cortocircuita, la corriente a través de la batería aumenta tres veces. La f.e.m. de la batería es $\mathcal{E}$.

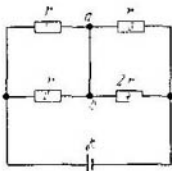


Fig. 3.23.

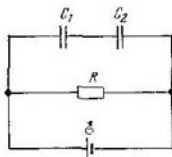


Fig. 3.24.

3.58. Determinar la carga del condensador C en el circuito representado en la fig. 3.25. Despréciase la resistencia interna de la batería.

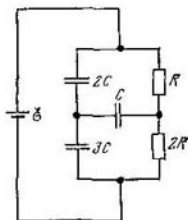


Fig. 3.25.

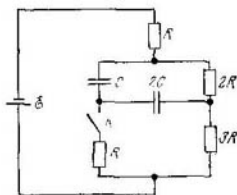


Fig. 3.26.

3.59. Determinar la carga que pasa por el interruptor K , cuando se cierra, en el circuito representado en la fig. 3.26. Despréciase la resistencia interna de la batería.

3.60. Dos acumuladores, cuyas fuerzas electromotrices son, respectivamente, $\mathcal{E}_1 = 57$ V y $\mathcal{E}_2 = 32$ V se acoplan como indica la fig. 3.27. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b si la relación entre las resistencias internas de los acumuladores es $r_2/r_1 = 1,5$?

3.61. Dos baterías, cuyas fuerzas electromotrices son, respectivamente, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ están acopladas como muestra la fig. 3.28. ¿Qué relación debe existir entre las resistencias internas de las baterías para que no pase corriente a través del galvanómetro?

3.62. En el circuito que muestra la fig. 3.29, $R_2 > R_1$. ¿Para qué resistencia R_3 puede elegirse una resistencia R_4 tal, que la co-

riente a través del galvanómetro sea nula? Las dos baterías tienen la misma f.e.m. Despréciense la resistencia interna de las baterías.

3.63. Dos baterías, cuyas fuerzas electromotrices $\mathcal{E}$ son iguales, están conectadas de tal forma que la f.e.m. de la fuente que forman

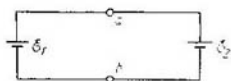


Fig. 3.27.

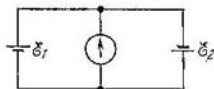


Fig. 3.28.

es igual a $\mathcal{E}/2$. La resistencia interna de una de las baterías es igual a r . Representar el esquema de la conexión y determinar los valores posibles de la resistencia interna de la segunda batería.

3.64. Dos baterías, cuyas resistencias internas son iguales, están conectadas de tal modo que la f.e.m. de la fuente que forman es igual a $\mathcal{E}$. La f.e.m. de una de las baterías es igual a $3\mathcal{E}/2$. Representar todos los circuitos de conexión posibles y para cada uno de ellos determinar la f.e.m. de la segunda batería.

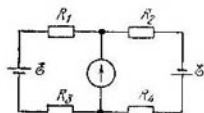


Fig. 3.29.

3.65. A través de un acumulador, al finalizar su carga, pasa una corriente $I_1 = 4$ A. En estas condiciones la tensión en sus bornes es $V_1 = 12,8$ V. Al descargar este mismo acumulador con una corriente $I_2 = 6$ A, la tensión en sus bornes es $V_2 = 11,1$ V. Hallar la corriente de cortocircuito.

3.66. Un generador con f.e.m. $\mathcal{E}_1 = 12$ V y resistencia interna $r_1 = 0,2 \Omega$ carga una batería de acumuladores con f.e.m. $\mathcal{E}_2 =$

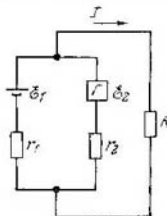


Fig. 3.30.

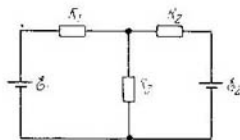


Fig. 3.31.

$= 10$ V y resistencia interna $r_2 = 0,6 \Omega$. En paralelo con la batería está conectada una lámpara cuya resistencia es $R = 3 \Omega$. Determinar la corriente en la batería y en la lámpara.

3.67. Un circuito eléctrico, formado por las resistencias R_1 , R_2 y R_3 está conectado a dos fuentes de f.e.m. $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ (fig. 3.30).

¿En qué condiciones la corriente a través de la resistencia R_1 será nula?

3.68. Las fuentes de corriente eléctrica en los sistemas del equipo eléctrico de los automóviles son un generador de corriente continua y un acumulador acoplado en paralelo con él (fig. 3.31). La f.e.m.

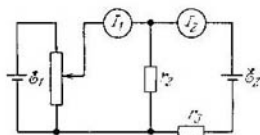


Fig. 3.32.

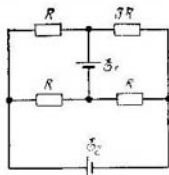


Fig. 3.33.

del generador es $\mathcal{E}_2 = 14$ V y su resistencia interna $r_2 = 0.05 \Omega$. La f.e.m. del acumulador es $\mathcal{E}_1 = 12$ V. ¿Con qué corriente I , consumida por la carga, empieza a descargarse el acumulador?

3.69. En el circuito representado en la fig. 3.32 la posición del cursor del potenciómetro se ha elegido de tal modo que la corriente $I_2 = 0$. ¿A qué es igual en este caso la corriente I_1 ?

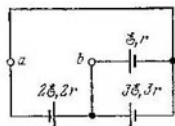


Fig. 3.34.

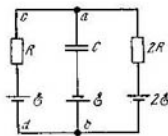


Fig. 3.35.

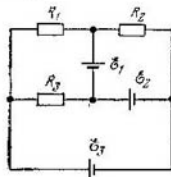


Fig. 3.36.

3.70. En el circuito representado en la fig. 3.33 la f.e.m. $\mathcal{E}_1$ de la batería disminuyó en 1,5 V, después de lo cual en las distintas partes del circuito variaron las corrientes. ¿Cómo hay que variar la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}_2$ para que sea igual que antes: a) la corriente a través de la batería $\mathcal{E}_1$; b) la corriente a través de la batería $\mathcal{E}_2$?

3.71. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos a y b (fig. 3.34). La f.e.m. y las resistencias internas de las baterías se indican en la figura.

3.72. Determinar la diferencia de potencial en el condensador C (fig. 3.35). Los valores de las resistencias y las fuerzas electromotrices de las baterías se indican en la figura. Despréciense las resistencias internas de las baterías. ¿Qué signo tendrá la carga en la armadura del condensador acoplada a las resistencias?

3.73. Todas las resistencias que figuran en el circuito de la fig. 3.36 son iguales: $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Las fuerzas electromotrices de las baterías son, respectivamente, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_3 = 4\mathcal{E}$. Hallar el módulo y la dirección de la corriente que pasa por cada resistencia y las corrientes que pasan por las baterías. Las resistencias internas de las baterías se desprecian.

3.74. Un circuito eléctrico está formado por las baterías cuyas fuerzas electromotrices son $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ y por las resistencias cuyos valores son R_1 , R_2 y R_3 (fig. 3.37). A una de las partes del circuito se conecta el voltímetro V de gran resistencia interna. Hallar la f.e.m. $\mathcal{E}_x$ con la cual la indicación del voltímetro no varía si se cierra el interruptor K . Las resistencias internas de las baterías se desprecian.

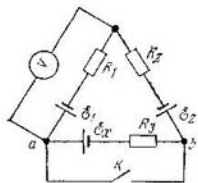


Fig. 3.37.

3.75. Un condensador plano con la distancia d entre las placas rellena de azufre, cuya permitividad es ϵ y su resistividad, ρ , está intercalado en el circuito de una batería con f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r . ¿A qué es igual la intensidad E del campo eléctrico del condensador si su capacidad es igual a C ?

3.76. Un condensador esférico de capacidad $C_0 = 10^{-10}$ F se llena de un líquido poco conductor cuya resistividad $\rho = 10^4$ $\Omega \cdot m$. Hallar la resistencia de fuga del condensador.

3.77. El espacio entre las placas de un condensador plano está lleno de un líquido con permitividad ϵ y resistividad ρ . Hallar la fuerza de la interacción entre las placas del condensador cuando a través de él pasa una corriente I . El área de las placas del condensador es igual a S .

3.78. Dos condensadores planos, de aire, cuyas capacidades respectivas son C_1 y C_2 , están acoplados en serie y conectados a una batería con f.e.m. $\mathcal{E}$. ¿Qué diferencias de potencial habrá en los condensadores si se llenan de sustancias cuyas resistividades sean ρ_1 y ρ_2 y sus permitividades, ϵ_1 y ϵ_2 ?

3.79. Por un conductor de cobre de sección $S = 1$ mm² pasa la corriente $I = 10$ mA. Hallar la velocidad media v del movimiento ordenado de los electrones a lo largo del conductor. Suponer que a cada átomo de cobre corresponde un electrón de conducción. La masa atómica del cobre es $A = 63.6$, y su densidad $\rho = 8.9$ g/cm³.

3.80. El aire que hay en el espacio entre las placas de un condensador plano, cuyas dimensiones son $10 \times 10 \times 2.5$ cm³, se ioniza con rayos X de manera que en 1 cm³ se forman en 1 s 10^9 iones y el mismo número de electrones libres. Las placas del condensador están conectadas a una fuente de tensión $V = 1300$ V a través de una resistencia $R_1 = 10^{10}$ Ω . Otra resistencia $R_2 = 10^{10}$ Ω se acopla en paralelo al condensador (fig. 3.38). ¿Qué corriente pasa a través de la resistencia R_1 ? Suponer que los iones y los electrones llegan a las

placas del condensador sin tener tiempo de recombinarse y que la carga de cada ion es igual en módulo a la carga de un electrón.

3.81. ¿Qué masa de aluminio se deposita en el cátodo durante el tiempo $t = 10$ h en la electrólisis de $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$, si la corriente a través del electrolito es $I = 1$ A? La constante de Faraday $F = 96\,500$ C/mol y la masa atómica del aluminio $A = 27$.

3.82. ¿Qué carga Q pasa a través de un baño electrolítico en el tiempo $t = 10$ s, si durante este tiempo la corriente aumenta uniformemente desde cero hasta $I = 3$ A? ¿Qué masa de cobre se deposita en el cátodo del baño al ocurrir esto, si el electrolito es vitriolo azul? La constante de Faraday $F = 96\,500$ C/mol y la masa atómica del cobre $A = 63,6$.

3.83. ¿Qué masa de cobre se desprende de una solución de CuSO_4 durante el tiempo $t = 100$ s, si la corriente que pasa a través del electrolito varía según la ley $I = (5 - 0,02 t)$ A, donde t es el tiempo en segundos? La constante de Faraday $F = 96\,500$ C/mol y la masa atómica del cobre, $A = 63,6$.

3.84. El niquelado de un objeto metálico de área $S = 120$ cm² duró el tiempo $t = 5$ h siendo la corriente $I = 0,3$ A. La valencia del níquel $z = 2$, su masa atómica $A = 58,7$ y su densidad $\rho = 9$ g/cm³. Determinar el espesor de la capa de níquel.

3.85. ¿Qué carga hay que hacer pasar a través de un baño electrolítico con agua acidulada para obtener $V = 1$ dm³ de gas detonante a la temperatura $t = 27$ °C y la presión $P = 10^5$ Pa?

3.86. Durante cuanto tiempo hay que efectuar la electrólisis del agua acidulada para que con el hidrógeno obtenido sea posible llenar, en condiciones normales, un globo aerostático con 2000 N de fuerza ascensional? La corriente durante la electrólisis es $I = 100$ A.

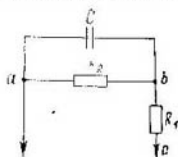


Fig. 3.38.

Trabajo y potencia de la corriente eléctrica.

Ley de Joule—Lenz

3.87. ¿Qué cantidad de calor se desprende en el circuito cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2 (fig. 3.39).

3.88. ¿Qué cantidad de calor se desprende en la resistencia R una vez que se cierra el interruptor K (fig. 3.40)? La resistencia interna de la batería se desprecia.

3.89. Un condensador de capacidad C , cargado hasta la tensión $\mathcal{E}$, se conecta, a través de una resistencia grande R , a la batería con f.e.m. $5\mathcal{E}$ (fig. 3.41). Determinar la cantidad de calor que se desprende en el circuito cuando el condensador se carga hasta la tensión $5\mathcal{E}$.

3.90. Un condensador de capacidad C , cargado hasta la tensión $4\mathcal{E}$, se descarga a través de una resistencia grande R y de una batería con f.e.m. $\mathcal{E}$ (fig. 3.42). Hallar la cantidad de calor que se desprende al descargarse el condensador.

3.91. ¿Qué cantidad de calor se desprende en el circuito cuando el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2 (fig. 3.43)?

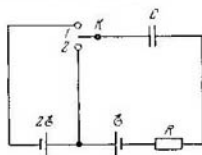


Fig. 3.39.

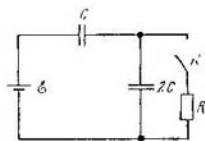


Fig. 3.40.

3.92. ¿Qué cantidad de calor se desprende en el circuito si el conmutador K se pasa de la posición 1 a la posición 2 (fig. 3.44)?

3.93. Entre las armaduras de un condensador plano se encuentra una lámina dieléctrica ($\epsilon = 3$) que llena todo el espacio del conden-



Fig. 3.41.

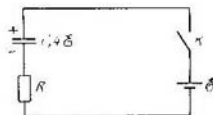


Fig. 3.42.

sador. El condensador está acoplado a través de una resistencia a una batería con f.e.m. $\mathcal{E} = 100$ V (fig. 3.45). La lámina se saca rápidamente, de manera que la carga en el condensador no tiene tiempo de

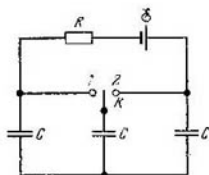


Fig. 3.43.

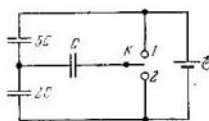


Fig. 3.44.

variar. ¿Qué energía, en forma de calor, se desprenderá después de esto en el circuito? La capacidad del condensador sin llenar es $C_0 = 100$ μF .

3.94. La carga de un condensador de capacidad C hasta la tensión $2\mathcal{E}$ se hace por dos procedimientos (fig. 3.46): primero, el conmuta-

por K se coloca inmediatamente en la posición 3; segundo, dicho conmutador se coloca primeramente en la posición 2 y luego, cuando el condensador se ha cargado hasta la tensión $\mathcal{E}$, se pasa a la posición 3. Hallar la relación entre los rendimientos de la batería para los distintos procedimientos de carga.

3.95. Un condensador de capacidad $C = 0,04 \mu\text{F}$, por medio del conmutador K (fig. 3.47) se carga periódicamente, con la frecuencia $n = 50$ veces por segundo, de una fuente con f.e.m. $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$

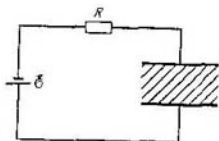


Fig. 3.45.

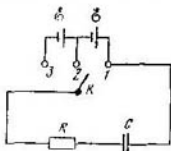


Fig. 3.46.

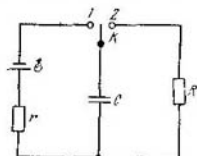


Fig. 3.47.

y resistencia interna r , y se descarga a través de una carga cuya resistencia es R . Determinar la potencia que se disipa en la carga y el rendimiento de este dispositivo. Suponer que el tiempo que dura el cierre de los contactos del conmutador es suficiente para que el condensador se cargue totalmente en la posición 1 y se descargue totalmente en la posición 2.

3.96. A los extremos de un alambre de plomo de 1 m de longitud se aplica una diferencia de potencial $V = 10 \text{ V}$. ¿Cuánto tiempo τ pasará desde que empiece a pasar la corriente hasta el instante en que el plomo empiece a fundirse? La temperatura inicial $t_0 = 20^\circ\text{C}$, la temperatura de fusión del plomo, $t = 327^\circ\text{C}$, su resistividad $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$, su calor específico, $c = 0,125 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$ y su densidad, $d = 11,3 \text{ g/cm}^3$. Las pérdidas de calor en el espacio circundante se desprecian.

3.97. Un acumulador, cuya resistencia interna $r = 0,08 \Omega$, con la corriente $I_1 = 4 \text{ A}$ cede al circuito exterior la potencia $N_1 = 8 \text{ W}$. ¿Qué potencia N_2 cederá al circuito exterior con la corriente $I_2 = 6 \text{ A}$?

3.98. La potencia que se disipa en una resistencia R_1 acoplada a una batería es igual a N . ¿A qué es igual la f.e.m. de la batería si dicha potencia no varía al sustituir R_1 por R_2 ?

3.99. En paralelo a una resistencia R conocida, conectada a una batería, se acopla otra resistencia de valor desconocido. Con esto la potencia que se desprende en la parte exterior del circuito no varía. Determinar el valor desconocido de la resistencia R_x . La resistencia interna de la batería es igual a r .

3.100. Una tetera eléctrica tiene dos arrollamientos. Cuando se conecta uno de ellos el agua de la tetera hierve al cabo de 10 min , y cuando se conecta el otro, al cabo de 15 min . ¿Cuánto tiempo tar-

dará en hervir el agua si ambos arrollamientos se conectan a la vez: a) en paralelo y b) en serie?

3.101. El calentador de un hervidor tiene cuatro secciones, cada una de las cuales posee la resistencia $R = 1 \, \Omega$. El calentador se alimenta de una batería de acumuladores con f.e.m. $\mathcal{E} = 8 \, \text{V}$ y resistencia interna $r = 1 \, \Omega$. ¿Cómo hay que conectar los elementos del calentador para que el agua que hay en el hervidor se caliente más pronto? ¿Qué potencia gastará en este caso el acumulador?

3.102. Un circuito eléctrico está formado por resistencias acopladas de tal forma que entre cada dos de los n puntos del circuito está conectada una resistencia cuyo valor es r . ¿Qué potencia se disipará en este circuito si a dos puntos cualesquiera se conecta una batería con f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r ?

3.103. ¿Qué corriente pasará por unos conductores de alimentación en caso de ser cortocircuitados, si en dos hornillos eléctricos, cuyas resistencias respectivas son $R_1 = 200 \, \Omega$ y $R_2 = 500 \, \Omega$, se desprende, al ser calentados por turno, la misma potencia $N = 200 \, \text{W}$?

3.104. La energía eléctrica de un generador de potencia N_0 se transmite al consumidor por conductores cuya resistencia es r . La f.e.m. del generador es igual a $\mathcal{E}$. Determinar el rendimiento de la línea de transmisión, es decir, la razón de la potencia disipada en la carga útil a la potencia del generador. La resistencia interna del generador se desprecia.

3.105. La energía eléctrica de un generador se transmite al consumidor por conductores cuya resistencia es r . El rendimiento de la línea de transmisión, es decir, la razón de la potencia disipada en la carga útil a la potencia del generador, es igual a η . Determinar la resistencia de la carga. La resistencia interna del generador se desprecia.

3.106. ¿Cuántas veces hay que elevar la tensión de la fuente para que las pérdidas de energía (en la línea de transmisión de la fuente al consumidor) disminuyan 100 veces con la condición de que la potencia de salida del generador permanezca constante?

3.107. En una transmisión de energía eléctrica a gran distancia se utiliza un transformador que eleva la tensión hasta $6 \, \text{kV}$, cargado hasta la potencia normal de $1000 \, \text{kW}$. En estas condiciones la diferencia entre las indicaciones de los contadores de energía eléctrica, montados en la subestación de transformadores y en el punto de recepción, aumenta cada día en $216 \, \text{kW}$. ¿Cuántas veces hay que elevar la tensión para que las pérdidas de energía eléctrica no superen el $0,1\%$?

3.108. Una línea tiene la resistencia $r = 300 \, \Omega$. ¿Qué tensión debe tener el generador para que al transmitir al consumidor la potencia $N = 25 \, \text{kW}$ por dicha línea, las pérdidas en ella no superen el 4% de la potencia transmitida?

3.109. Determinar la masa de cobre necesaria para construir una línea bifilar de longitud $l = 5 \, \text{km}$. La tensión en las barras de la

central es $V = 2400$ V. La potencia que se transmite al consumidor, $N = 60$ kW. La pérdida tolerable de tensión en los conductores es igual al 8%. La densidad del cobre $d = 8,9$ g/cm³ y la resistividad $\rho = 0,017 \cdot 10^{-8}$ $\Omega \cdot m$.

3.110. Un circuito está formado por dos baterías, cuyas fuerzas electromotrices son $\mathcal{E}_1 = 4$ V y $\mathcal{E}_2 = 12$ V, un potenciómetro con

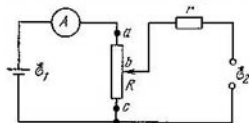


Fig. 3.48.

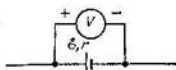


Fig. 3.49.

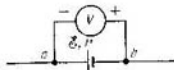


Fig. 3.50.

contacto deslizante, cuya resistencia total es $R = 1500$ Ω , una resistencia $r = 200$ Ω y un amperímetro (fig. 3.48). ¿Con qué polo de la batería $\mathcal{E}_2$ hay que unir el contacto deslizante y qué posición debe ocupar éste en el potenciómetro para que la corriente a través del amperímetro sea nula? ¿Qué potencia se disipará en las resistencias R y r en estas condiciones? Desprecie la resistencia interna de la batería.

3.111. Una batería con f.e.m. $\mathcal{E} = 4$ V y resistencia interna $r = 1$ Ω forma parte de un circuito desconocido (fig. 3.49). A los polos de la batería se conecta un voltímetro de manera que el borne positivo del voltímetro queda unido al polo positivo de la batería. El voltímetro marca la tensión $V = 6$ V. Determinar la cantidad de calor que se desprende en la unidad de tiempo en la resistencia interna de la batería.

3.112. Una batería con f.e.m. $\mathcal{E} = 4$ V y resistencia interna $r = 1$ Ω forma parte de un circuito desconocido (fig. 3.50). A los polos de la batería se conecta un voltímetro. Para que el voltímetro funcione normalmente resulta necesario conectar su borne positivo al polo negativo de la batería. En estas condiciones el voltímetro marca la tensión $V = 2$ V. ¿Qué cantidad de calor se desprende en la unidad de tiempo en la resistencia interna de la batería?

3.113. La corriente que pasa a través de una resistencia $R = 100$ Ω varía con el tiempo según la ley $I = k \sqrt{t}$, en la que $k = 1$ si el tiempo se mide en segundos y la corriente en amperios. ¿Qué tiempo estuvo pasando la corriente si en la resistencia se desprendió la cantidad de calor $Q = 1,8$ kJ?

3.114. La tensión en una resistencia $R = 100$ Ω varía con el tiempo según la ley $V = k \sqrt{t}$, en la que $k = 2$ si el tiempo se mide en segundos y la tensión en voltios. Hallar la cantidad de calor que se desprende en la resistencia durante los primeros 100 s.

3.115. Cuando por un alambre se hace pasar durante largo tiempo una corriente $I_1 = 1,4$ A, aquél se calienta hasta la temperatura $t_1 = 55$ °C, y cuando se hace pasar una corriente $I_2 = 2,8$ A, se

calienta hasta la temperatura $t_2 = 160^\circ\text{C}$. ¿Hasta qué temperatura t_x se calentará el alambre si la corriente es $I_3 = 5,5\text{ A}$? La radiación térmica por unidad de superficie es proporcional a la diferencia de temperatura entre el alambre y el aire. La dependencia de la resistencia del alambre respecto de la temperatura se desprecia.

3.116. Dos alambres de constantán de igual longitud, de los cuales uno tiene doble diámetro que el otro, están conectados en paralelo en un circuito eléctrico. ¿En cuántas veces se diferencian sus dilataciones cuando la corriente pasa durante mucho tiempo por la red? La radiación térmica por unidad de superficie es proporcional a la diferencia de temperatura entre el alambre y el aire. La dependencia de la resistencia del alambre respecto de la temperatura se desprecia. ¿Cómo variará la respuesta si los alambres se conectan en serie?

Elementos de característica no lineal en los circuitos de corriente continua

3.117. Determinar la resistencia del circuito eléctrico (fig. 3.51) para dos sentidos de la corriente: a) la corriente pasa de A a B (resistencia R_{AB}), y b) la corriente pasa de B a A (resistencia R_{BA}). Los valores de las resistencias son $R_1 = 30\ \Omega$ y $R_2 = 60\ \Omega$. En la red está incluido el diodo ideal D *).

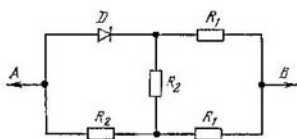


Fig. 3.51.

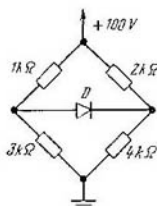


Fig. 3.52.

3.118. Determinar la corriente que pasa por el diodo ideal D en el circuito representado en la fig. 3.52.

3.119. En un circuito eléctrico hay una célula fotoeléctrica (fig. 3.53). Si el potencial del ánodo de la célula es mayor que el potencial del cátodo, la corriente de dicha célula $I_0 = 10\text{ mA}$ (corriente de saturación). En el caso contrario la corriente de la célula es nula. Determinar la tensión en la célula fotoeléctrica.

3.120. Un circuito (fig. 3.54) está formado por dos resistencias iguales R y dos elementos no lineales también iguales, cuya caracte-

*) Se llama ideal el diodo en el cual la resistencia en el sentido directo puede considerarse nula, y en el sentido inverso, infinita.

rística tensión-intensidad tiene la forma $V = \alpha I^2$, donde α es cierto coeficiente constante conocido. ¿Con qué f.e.m. de la fuente la corriente a través del galvanómetro será nula? La resistencia de la fuente se desprecia.

3.121. En la fig. 3.55 se representa el esquema de un puente de Wheatstone en el cual las resistencias tienen los valores $R = 5 \Omega$,

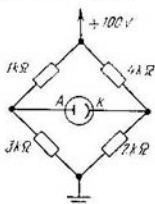


Fig. 3.53.

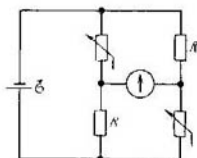


Fig. 3.54.

$r_1 = 2\Omega$ y $r_2 = 4\Omega$ y la característica tensión-intensidad del elemento no lineal tiene la forma $I = \alpha V^2$. Determinar el coeficiente de proporcionalidad α sabiendo que el puente resulta estar equilibrado cuando la f.e.m. de la batería $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$.

3.122. El encendido de una lámpara de neón se efectúa por medio del circuito que muestra la fig. 3.56. Una vez que se cierra el con-

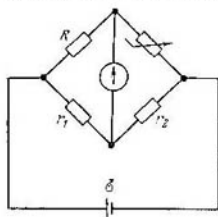


Fig. 3.55.

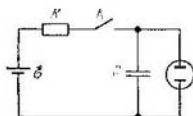


Fig. 3.56.

mutador K , empieza a cargarse el condensador C . Cuando la tensión en la lámpara, igual a la tensión en el condensador, alcanza cierto valor, la lámpara se enciende, después de lo cual la tensión en ella descende. La tensión mínima en la lámpara, con la cual ésta aún puede alumbrar, es $V = 80 \text{ V}$; en estas condiciones la corriente a través de ella es $I = 1 \text{ mA}$. ¿Con qué valores de la resistencia R arderá de un modo estacionario la lámpara después de encendida? La f.e.m. de la batería es $\mathcal{E} = 120 \text{ V}$.

3.123. En el caso de la descarga mantenida en el gas, la dependencia de la corriente a través del tubo de descarga I respecto de la

tensión V en dicho tubo, tiene la forma que muestra la fig. 3.57. Con cierta tensión V_s en el tubo, la corriente a través de él llega a la saturación. La corriente de saturación es $I_s = 10 \mu\text{A}$. Si el tubo, acoplado en serie con cierta resistencia de lastre, está conectado a una fuente de f.e.m. $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^3 \text{ V}$, la corriente a través de él es $I_0 = 5 \mu\text{A}$. ¿Cómo hay que variar la resistencia de lastre para alcanzar la corriente de saturación?

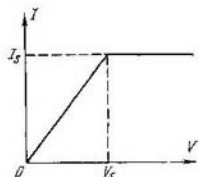


Fig. 3.57.

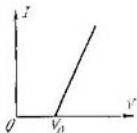


Fig. 3.58.

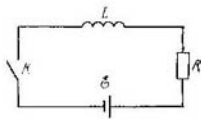


Fig. 3.59.

$I_s = 10 \mu\text{A}$. El tubo, con la resistencia de lastre $R = 3 \cdot 10^8 \Omega$ acoplada en serie a él, está conectado a una fuente de f.e.m. $\mathcal{E} = 6 \text{ kV}$. ¿Qué corriente se establece a través del tubo y cuál será en este caso la tensión en él? La resistencia interna de la batería se desprecia.

3.125. En la fig. 3.58 se muestra la característica tensión-intensidad de cierto elemento no lineal. Hasta la tensión V_0 no pasa corriente por el elemento; después la corriente aumenta linealmente con la tensión. Cuando este elemento se conecta en serie con una fuente de f.e.m. continua y una resistencia de lastre $R_1 = 300 \text{ k}\Omega$, a través de él pasa la corriente $I_1 = 0,5 \text{ mA}$. Cuando se disminuye la resistencia de lastre hasta $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, la corriente a través del elemento se duplica. ¿Qué corriente pasará a través del elemento si la resistencia de lastre se cortocircuita?

3.126. En un elemento no lineal (véase el problema 3.125) la tensión es $V_0 = 100 \text{ V}$. Cuando se conecta a una batería de f.e.m. continua con resistencia interna $r = 25 \text{ k}\Omega$, a través del elemento pasa la corriente $I_1 = 2 \text{ mA}$, y si se conecta con esta misma batería a través de una resistencia de lastre $R = r$, pasa la corriente $I_2 = 1 \text{ mA}$. Determinar la f.e.m. de la batería.

3.127. ¿Con qué valores de las resistencias R , en el circuito representado en la fig. 3.59, puede producirse, al abrir el interruptor, una descarga en arco? Se sabe que la tensión en la zona de descarga en arco se relaciona con la corriente en el circuito mediante la fórmula $V = A + B/I$, donde $A = 10 \text{ V}$ y $V = 100 \text{ V} \cdot \text{A}$. La f.e.m. de la batería es $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$. Suponer que la resistencia del circuito está concentrada en la resistencia R . ¿Qué corriente se establecerá en el circuito si $R = 8 \Omega$?

3.128. En la fig. 3.60 se da la gráfica de la tensión en el intervalo de descarga de una descarga en arco en función de la corriente. El arco se conecta a una fuente de tensión continua en serie con una resistencia. ¿Con qué valor máximo de esta resistencia puede arder el arco si la f.e.m. de la fuente es $\mathcal{E} = 85 \text{ V}$?

3.129. Cuando aumenta la corriente, la tensión en el intervalo de descarga de una descarga en arco disminuye, tendiendo, si las corrientes son grandes, a cierto valor constante. El arco se conecta

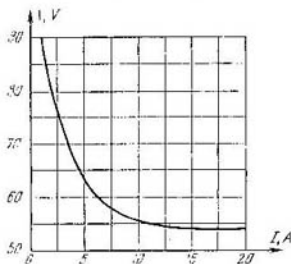


Fig. 3.60.

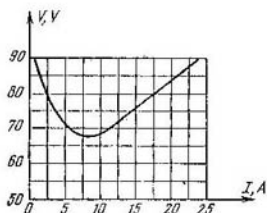


Fig. 3.61.

a un circuito en serie con una resistencia de lastre. La característica tensión-intensidad de este circuito se muestra en la fig. 3.61. Determinar la corriente en el circuito cuando la f.e.m. de la batería es $\mathcal{E} = 80 \text{ V}$. Construir la característica tensión-intensidad del arco en el circuito sin resistencia de lastre. Utilizando la gráfica obtenida, determinar el valor máximo de la resistencia de lastre con el cual puede arder el arco. La resistencia interna de la batería se desprecia.

3.130. Para estabilizar la tensión se emplea a veces un tubo de descarga en gas, estabilizador de tensión, cuyo esquema de conexión se muestra en la fig. 3.62. Cuando varía la corriente que pasa a través del estabilizador desde 5 hasta 15 mA, la tensión en él prácticamente no varía y permanece igual a 150 V. La resistencia de carga $R_c = 10 \text{ k}\Omega$. Determinar el valor de la resistencia R y de la tensión $\mathcal{E}$, con las cuales la tensión en la carga permanece constante cuando varía la tensión de entrada en $\pm 10\%$.

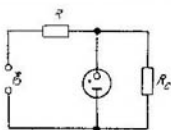


Fig. 3.62.

3.131. En la fig. 3.63, a se da la característica tensión-intensidad de la lamparita de una linterna de bolsillo conectada en el circuito que muestra la fig. 3.63, b. La f.e.m. de la batería es $\mathcal{E} = 4 \text{ V}$, la resistencia total del potenciómetro, $R = 40 \Omega$, y la resistencia $r = 10 \Omega$. Hallar gráficamente la corriente en la lamparita. ¿Con

qué posición del cursor del potenciómetro será nula la tensión entre los puntos A y B ? ¿Con qué posición de dicho cursor casi no variará la tensión entre los puntos A y B cuando la f.e.m. de la batería sufra pequeñas variaciones? La resistencia interna de la batería se desprecia.

3.132. Se dispone de un elemento no lineal en el cual entre la corriente I y la tensión aplicada V existe la relación $I = 0,01V^2$

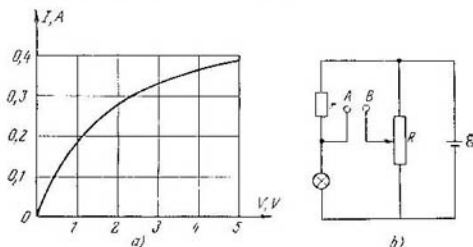


Fig. 3.63.

(I en amperios y V en voltios). Este elemento está conectado en serie con una resistencia $R = 100 \Omega$ a una batería cuya f.e.m. $\mathcal{E} = 15,75$ V. Hallar el calor que se desprende en el elemento no lineal.

La resistencia interna de la batería se desprecia.

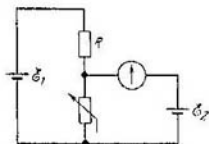


Fig. 3.64.

3.133. En el circuito representado en la fig. 3.64 la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}_2 = 4$ V y la resistencia $R = 50 \Omega$. Se tiene un elemento no lineal en el cual entre la corriente I y la tensión aplicada V existe la relación $I = 0,02V^2$ (I en amperios y V en voltios). El circuito está equilibrado, es decir, el galvanómetro indica ausencia de corriente. Determinar la potencia de la batería $\mathcal{E}_1$, despreciando su resistencia interna.

3.134. En la fig. 3.65 se da la gráfica de la corriente a través de una lamparita de automóvil en función de la tensión en ella. La lamparita se conecta a una fuente de tensión continua $\mathcal{E} = 10$ V en serie con una resistencia $R = 4 \Omega$. Determinar la potencia de la lamparita.

3.135. Para investigar las propiedades de un elemento de característica no lineal se hicieron una serie de experimentos. Primero se estudió la dependencia de la resistencia del elemento respecto de la temperatura. Cuando la temperatura se elevaba hasta $t_1 = 100^\circ\text{C}$ se producía instantáneamente un salto de la resistencia desde $R_1 = 50 \Omega$ hasta $R_2 = 100 \Omega$; al enfriarse el elemento, el salto inverso

se producía a la temperatura $t_2 = 99\text{ }^{\circ}\text{C}$ (fig. 3.66). Cuando al elemento se aplicaba la tensión continua $V_1 = 60\text{ V}$ su temperatura resultaba ser igual a $t_3 = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Finalmente, cuando al elemento se aplicaba la tensión continua $V_2 = 80\text{ V}$, en el circuito se producían

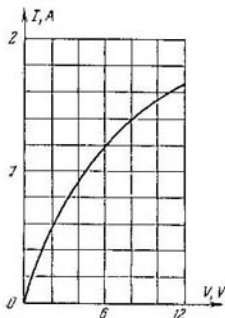


Fig. 3.65.

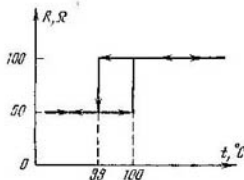


Fig. 3.66.

oscilaciones espontáneas de la corriente. Determinar el período T de estas oscilaciones y los valores máximo y mínimo de la tensión. La temperatura del aire en el laboratorio era $t_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$. La cantidad de calor que se desprende por unidad de tiempo en el elemento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del elemento y la del aire circundante. La capacidad calorífica del elemento es $C = 3\text{ J/K}$.

Partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético

3.136. Una gotita de aceite de radio $r = 1\text{ }\mu\text{m}$, portadora de la carga de dos electrones, está equilibrada en el campo eléctrico de un condensador plano, colocado horizontalmente, cuando a dicho condensador se aplica la tensión $V = 820\text{ V}$. La distancia entre las placas del condensador es $d = 8\text{ mm}$. La densidad del aceite, $\rho = 0.8\text{ g/cm}^3$. Hallar la carga del electrón.

3.137. Una gotita de aceite cargada está equilibrada en el campo eléctrico de un condensador plano colocado horizontalmente. ¿Qué tensión V se habrá suministrado a las placas del condensador si el radio de la gotita es $r = 2\text{ }\mu\text{m}$ y ella es portadora de la carga de tres electrones? ¿Qué ocurrirá si las placas se alejan una de otra en el caso en que: a) las placas están unidas a la fuente de tensión; b) las placas están desconectadas? La densidad del aceite es $\rho = 0.8\text{ g/cm}^3$. La distancia entre las placas, $d = 8\text{ mm}$.

3.138. El núcleo de un átomo de neón se acelera con una diferencia de potencial $V = 2000$ V. Hallar la velocidad v del núcleo. La masa atómica del neón es $A = 20$ y su número en el sistema periódico de los elementos, $Z = 10$.

3.139. Las placas A y D (fig. 3.67) están conectadas a tierra y las rejillas B y C tienen, respecto de la tierra, los potenciales 200 y 100 V, respectivamente. De la placa A se desprende sin velocidad inicial un electrón. ¿Con qué velocidades pasará a través de las rejillas B y C y llegará a la placa D ? La razón de la carga del electrón a su masa es $\gamma = e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

3.140. Un electrón, de energía cinética $T = 10$ keV, penetra en un condensador plano (fig. 3.68) entre cuyas placas se mantiene constante la diferencia de potencial $V = 40$ V. La distancia entre las



Fig. 3.67.

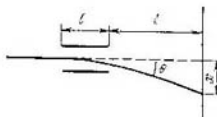


Fig. 3.68.

placas es $d = 1$ cm y la longitud de éstas, $l = 10$ cm. A la distancia $L = 20$ cm del condensador se encuentra una pantalla. La velocidad inicial del electrón es paralela a las placas. Hallar la desviación α del electrón en la pantalla. ¿Cómo variaría la respuesta si en vez del electrón se tomara un protón con la misma energía? La fuerza de la gravedad se desprecia.

3.141. Dentro de un condensador plano, descargado, cuyas placas están colocadas horizontalmente a la distancia $d = 1$ cm una de otra, se encuentra una partícula de polvo. A causa de la resistencia del aire, la partícula cae con velocidad constante de manera que el camino desde la placa superior hasta la inferior lo recorre en el tiempo $t_0 = 10$ s. Cuando la partícula se halla en la placa inferior se hace llegar al condensador la tensión $V = 980$ V. Al cabo de un tiempo $t = 5$ s la partícula llega a la placa superior. Determinar la razón de la carga de la partícula a su masa. La fuerza de la resistencia del aire considérese proporcional a la velocidad.

3.142. Una partícula de polvo de masa $m = 10^{-10}$ g cae entre las placas verticales de un condensador plano a igual distancia de ellas. A causa de la resistencia del aire la velocidad de la partícula es constante e igual a $v = 0,1$ cm/s. El condensador se conecta a una fuente de alta tensión $V = 490$ V y al cabo de un tiempo $t = 10$ s la partícula llega a una de las placas. Determinar la carga de la partícula.

La distancia entre las placas del condensador es $d = 1$ cm. La fuerza de la resistencia del aire considérese proporcional a la velocidad de la partícula.

3.143. A un acelerador, para obtener un haz de iones, llegan por una tubería $m_t = 10$ mg/s de argón en la unidad de tiempo. En la cámara de entrada al acelerador el argón se ioniza totalmente una vez y después se aceleran los iones Ar^+ con una diferencia de potencial $V = 1000$ V. Determinar la corriente iónica en el acelerador y la potencia del haz de iones. La carga del electrón es $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, la constante de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$ y la masa atómica del argón, $A = 40$.

3.144. Una de las placas de un condensador plano sin carga se ilumina con rayos X que arrancan de ella electrones con la velocidad $v = 10^6$ m/s. Los electrones se reúnen en la segunda placa. ¿Al cabo de cuánto tiempo cesará la corriente fotoeléctrica entre las placas del condensador si de cada centímetro cuadrado de superficie son arrancados cada segundo $n = 10^{13}$ electrones? La distancia entre las placas es $d = 10$ mm.

3.145. Un elemento de batería atómica (fuente de corriente) es un condensador esférico. Sobre su esfera interior se ha depositado un preparado radiactivo que emite partículas α con la velocidad $v_0 = 2,2 \cdot 10^6$ m/s. Determinar la f.e.m. de este elemento. La razón de la carga de la partícula α a su masa es $\gamma = 4,8 \cdot 10^7$ C/kg.

3.146. Un elemento de batería atómica (fuente de corriente) es un condensador sobre una de cuyas armaduras se ha depositado un preparado radiactivo. Hallar la f.e.m. de una batería compuesta por dos de estos elementos en los casos en que estén acoplados: a) en serie; b) en paralelo. En uno de los elementos se utiliza una fuente de partículas α con energía $T_1 = 2 \cdot 10^4$ eV, y en el otro, una de partículas con energía $T_2 = 4 \cdot 10^4$ eV.

3.147. ¿Cuál es la fuerza de interacción máxima entre dos protones con energía $T = 10^3$ eV lanzados en haces que se encuentran?

3.148. En una mezcla enrarecida de hidrógeno y helio ionizados se forma en cierto instante un sistema de partículas en reposo compuesto por dos protones y una partícula α (fig. 3.69). La distancia entre las partículas es $a = 10^{-2}$ cm. Bajo la acción de las fuerzas eléctricas las partículas salen lanzadas siguiendo la recta AB . Determinar la velocidad de las partículas cuando están a gran distancia una de otra. La carga del protón es $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. La razón de la carga del protón a su masa es $\gamma = 9,58 \cdot 10^7$ C/kg.

3.149. Dos partículas cargadas se encuentran en un campo exterior homogéneo cuya intensidad es igual a E . La partícula de masa m es portadora de la carga negativa $-q$, y la partícula de masa M , de la carga positiva $+Q$. ¿A qué distancia d entre sí deben hallarse las partículas para poder ser aceleradas como un todo único (es decir, sin que varíe su disposición mutua)?

3.150. Un dipolo eléctrico de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ rígidamente ligadas y situadas a la distancia l una de otra, se halla en

estado de equilibrio estable en un campo eléctrico homogéneo de intensidad E . ¿Qué trabajo hay que realizar para hacer girar 180° el dipolo?

3.151. En un condensador plano, cargado, se introduce un dipolo eléctrico de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ rígidamente ligadas, situadas a la distancia l una de otra. La orientación del dipolo en el con-

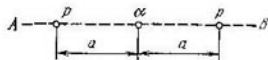


Fig. 3.69.

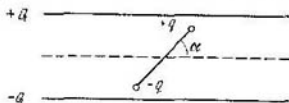


Fig. 3.70.

densador se muestra en la fig. 3.70. ¿Qué trabajo hubo que realizar para introducir el dipolo en el condensador? El área de las placas del condensador es igual a S y la carga del mismo igual a Q .

3.152. Un electrón penetra con la velocidad $v = 10^9$ cm/s en el espacio entre las placas de un condensador plano, entre las cuales se

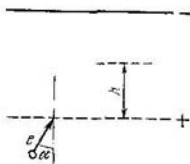


Fig. 3.71

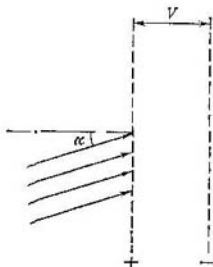


Fig. 3.72.

mantiene la diferencia de potencial $V = 425$ V (fig. 3.71). Determinar el alejamiento máximo h del electrón respecto de la placa inferior del condensador. La razón de la carga del electrón a su masa es $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg, el ángulo de incidencia de los electrones, $\alpha = 30^\circ$. La distancia entre las placas, $d = 1$ cm.

3.153. Sobre dos rejillas plano paralelas, entre las cuales hay aplicada una diferencia de potencial V , incide un haz paralelo de partículas cargadas negativamente (fig. 3.72). El ángulo de incidencia de las partículas es $\alpha = 60^\circ$. ¿Con qué energías pueden pasar las partículas a través de la rejilla si la carga de aquéllas es igual a q ?

3.154. Sobre dos rejillas paralelas, entre las cuales hay aplicada una diferencia de potencial V , inciden partículas, cargadas negativa-

mente con la energía $4 \text{ eV}/3$, bajo ángulos distintos (fig. 3.73). ¿Con qué ángulos de incidencia α las partículas serán «reflejadas», es decir, no podrán pasar a través de la rejilla? La carga de las partículas es igual a e .

3.155. Dos rejillas paralelas están conectadas a una batería con f.e.m. $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ (fig. 3.74). Bajo un ángulo de 45° incide sobre las rendijas un haz de electrones paralelo cuya energía inicial $U = 10 \text{ eV}$. ¿Qué ángulo α se desvía el haz al atravesar la rejilla?

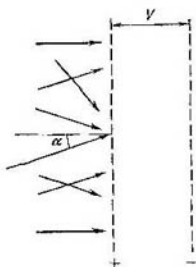


Fig. 3.73.

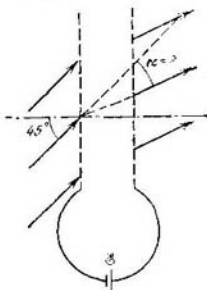


Fig. 3.74.

3.156. Bajo la acción de una radiación luminosa, de la superficie de una bolita metálica aislada de radio r se desprenden electrones con la velocidad inicial v , a causa de lo cual la bolita se carga. ¿Hasta qué carga máxima Q se puede, de este modo, cargar la bolita? La razón γ de la carga del electrón a su masa considérese conocida.

3.157. De la superficie de una esfera metálica de radio R , portadora de una carga $-Q$, se desprende un electrón. La velocidad de este electrón a una distancia infinita de la esfera resulta ser igual a v . ¿Con qué velocidad v_0 abandonó el electrón la superficie de la esfera? La razón γ de la carga del electrón a su masa considérese conocida.

3.158. ¿Con qué tensión se enciende un tubo de neón, si la energía de ionización del átomo es $U = 21,6 \text{ eV}$ y la longitud media del recorrido libre de los electrones en el gas es $l = 1 \text{ mm}$? La distancia entre los electrodos del tubo es $d = 1 \text{ cm}$.

3.159. La diferencia de potencial entre los electrodos de un tubo de descarga en gas con la cual comienza el proceso de ionización de los átomos de helio por choque electrónico es $V = 15 \text{ kV}$. La distribución del potencial entre los electrodos en ese instante se representa en la fig. 3.75. Determinar la longitud del recorrido libre l de los electrones si el potencial de ionización del átomo de helio es $V_0 = 24,5 \text{ V}$.

3.160. Determinar la diferencia de potencial entre los electrodos de un tubo de descarga en gas, con la cual comienza el proceso de ionización de los átomos de helio por choque electrónico. La distribución del potencial entre los electrodos en ese instante se representa

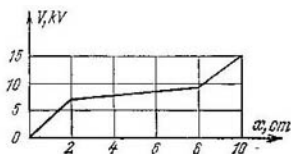


Fig. 3.75.

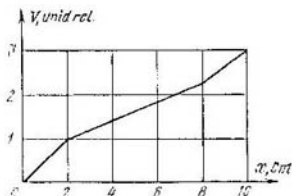


Fig. 3.76.

en la fig. 3.76; la longitud del recorrido libre medio de los electrones es $l = 10^{-4}$ m y el potencial de ionización de los átomos de helio, $V_0 = 24,5$ V.

3.161. Unos protones, con la velocidad v_0 , se mueven siguiendo una circunferencia en un condensador cilindrico (fig. 3.77). ¿Cuán-

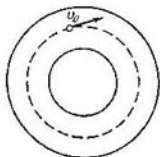


Fig. 3.77.

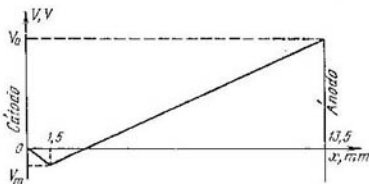


Fig. 3.78.

tas veces hay que variar la diferencia de potencial en el condensador para que con la misma velocidad se mueva por la misma circunferencia un haz de partículas α ?

3.162. Un flujo dirigido de electrones sale por una rendija larga y estrecha con la velocidad $v = 10^6$ m/s. La concentración de electrones en el flujo es $n = 10^{10}$ m $^{-3}$. ¿A qué distancia de la rendija será dos veces mayor la anchura del flujo? La masa del electrón $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg y su carga $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

3.163. A causa de la existencia de carga volumétrica en el espacio interelectrónico de un diodo plano, cuando la tensión anódica es $V_a = 33,75$ V se estableció la distribución del potencial que muestra la fig. 3.78. ¿Qué energía mínima tiene que poseer un electrón en el cátodo para poder llegar hasta el ánodo? ¿A qué es igual el tiempo de tránsito τ de los electrones con dicha energía? La razón de la carga

del electrón a su masa es $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg y el potencial mínimo, $V_m = -2,25$ V.

3.164. A causa de la existencia de carga volumétrica en el espacio interelectródico de un diodo plano, cuando la tensión anódica es $V_a = 0$ se establece la distribución del potencial que muestra la

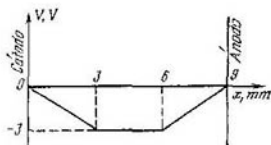


Fig. 3.79.

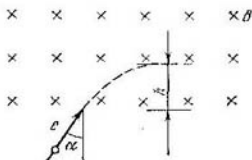


Fig. 3.80.

fig. 3.79. Un electrón, moviéndose del cátodo al ánodo a lo largo del eje x , llega a la superficie del ánodo con la energía cinética $T = 4$ eV. Determinar el tiempo de tránsito τ de dicho electrón del cátodo al ánodo. La razón de la carga del electrón a su masa es $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

3.165. Un electrón con la velocidad $v = 10^9$ cm/s penetra en la región de un campo magnético homogéneo de inducción $B = 10^{-3}$ T (fig. 3.80). La dirección de la velocidad es perpendicular a las líneas de inducción del campo. Determinar la profundidad máxima h de penetración del electrón en la región del campo magnético. La razón de la carga del electrón a su masa es $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg y el ángulo de incidencia, $\alpha = 30^\circ$.

3.166. Un electrón penetra en un campo magnético homogéneo. En el punto A este electrón tiene la velocidad v , que forma con la dirección del campo un ángulo α (fig. 3.81). ¿Con qué inducción del campo magnético resultará el electrón en el punto C? La carga del electrón es igual a e , su masa, igual a m , y la distancia $AC = L$.

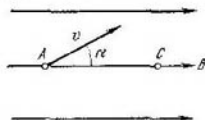


Fig. 3.81.

3.167. Las partes iniciales de las trayectorias de dos protones, uno de los cuales hasta la interacción estaba en reposo, después de la colisión tienen los radios de curvatura r y R . Las trayectorias se encuentran en un plano perpendicular a un campo magnético cuya inducción es B . ¿Qué energía tenía antes de la colisión el protón en movimiento? La carga del protón es igual a e , y su masa, igual a m_p .

3.168. Por medio de una cámara de niebla situada en un campo magnético, cuya inducción es B , se observa la dispersión elástica de las partículas α sobre núcleos de deuterio. Hallar la energía inicial de una partícula α si los radios de curvatura de las partes iniciales

de las trayectorias del núcleo de rechazo y de la partícula α dispersada resultan ser iguales entre sí y a r . Ambas trayectorias se encuentran en un plano perpendicular a las líneas de inducción del campo magnético. La carga del protón es igual a e , y su masa, igual a m_p .

3.169. Las partículas cargadas se aceleran en el ciclotrón en un campo magnético homogéneo de inducción $B = 1$ T con una frecuencia de la tensión aceleradora $f = 7,5$ MHz. El haz de partículas aceleradas con la corriente media $I = 1$ mA se saca de una órbita de radio $R = 1$ m. ¿Cuánto se elevará la temperatura del agua que enfría la «trampa» en la cual se frenan las partículas, si el gasto de agua, expresado en masa, es $M_t = 1$ kg/s?

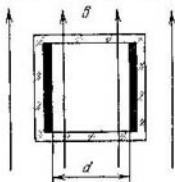


Fig. 3.82.

3.170. Un flujo de líquido conductor (metal fundido) pasa por un tubo de cerámica. Para determinar la velocidad de la corriente del líquido, el tubo se coloca en un campo magnético homogéneo, perpendicular al eje del tubo, en el tubo se sujetan dos electrodos que forman un condensador plano (fig. 3.82), y se mide la diferencia de potencial entre dichos electrodos. Hallar la velocidad del flujo si la inducción magnética del campo es $B = 0,01$ T, la distancia entre los electrodos, $d = 2$ cm, y la diferencia de potencial medida, $V = 0,4$ mV.

3.171. Rutherford y Bohr propusieron un modelo de átomo de hidrógeno en el cual un electrón gira por una órbita circular alrededor de un núcleo (protón) pesado, pequeño, cargado positivamente. Al pasar el electrón de una órbita a otra más próxima al núcleo, el átomo emite un fotón. ¿Cuál es la energía del fotón emitido por el átomo de hidrógeno cuando el electrón pasa de la órbita de radio $r_2 = 2,1 \cdot 10^{-8}$ cm a la órbita de radio $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-9}$ cm? Las cargas del electrón y del protón son iguales a $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

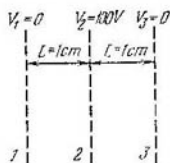


Fig. 3.83.

3.172. En el modelo planetario del átomo de hidrógeno (de Rutherford y Bohr) se suponía que el electrón giraba por una órbita circular alrededor de un núcleo (protón) pesado, pequeño, cargado positivamente. Determinar el radio del átomo de hidrógeno si se sabe que la energía mínima que hay que comunicarle al electrón para separarlo del átomo (energía de ionización) es $E = 2,2 \cdot 10^{-18}$ J. Las cargas del electrón y del protón son iguales a $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

3.173. Valorar en orden de magnitud la gama de frecuencias de las señales de alta frecuencia, con cuya amplificación en los amplificadores de lámparas empieza a manifestarse la inercia de los electrones. La distancia entre los electrodos de la lámpara es $d = 0,1$ cm. La diferencia de potencial entre los electrodos, $V = 200$ V. La razón de la carga del electrón a su masa, $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

3.174. Cerca de la rejilla 1, a su derecha (fig. 3.83), como resultado de la ionización de un átomo de nitrógeno, surge un electrón libre cuya velocidad inicial puede considerarse nula. Determinar la longitud máxima λ de las ondas electromagnéticas que emite el electrón al moverse entre las rejillas 1 y 3. La carga del electrón es $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, su masa, $m = 9,11 \cdot 10^{-28}$ g y los demás datos se dan en la fig. 3.83. ¿Cómo hay que cambiar el potencial de la rejilla 2 para que el ion de nitrógeno empiece a moverse entre las rejillas 1 y 3 emitiendo ondas electromagnéticas de la misma longitud máxima λ ?

Inducción electromagnética. Corriente alterna

3.175. Una bobina de alambre de n espiras se introduce en un campo magnético, de manera que las líneas de inducción son perpendiculares al plano de las espiras, y por medio de conductores flexibles se une a un galvanómetro. Cuando la bobina se aleja rápidamente del campo magnético, por el circuito pasa cierta carga q que mide el galvanómetro. Determinar la inducción magnética B del campo suponiendo que todas las espiras tienen la misma área S y que la impedancia del circuito es igual a R .

3.176. En un campo magnético uniforme de inducción $B = 0,1$ T se encuentra una espira de alambre plana de manera que su plano es perpendicular a las líneas de inducción. La espira está cerrada sobre un galvanómetro. La carga total que pasa a través del galvanómetro al girar la espira es $Q = 5 \cdot 10^{-3}$ C. ¿Qué ángulo se giró la espira? El área de la espira $S = 10^3$ cm² y la resistencia de ésta es $R = 2 \Omega$.

3.177. Cuando se conecta un campo magnético perpendicular al plano de una espira de radio R , por la espira pasa la carga Q . ¿Qué carga pasará por la espira si (permaneciendo invariable el campo) se hace de ella un «ocho» formado por dos circunferencias, la menor de las cuales tiene el radio igual a $R/4$? El plano del «ocho» también es perpendicular al campo magnético.

3.178. Una espira de alambre, cuya área es $S = 10^2$ cm², está cortada en cierto punto y en el corte se ha conectado un condensador de capacidad $C = 10$ μ F. La espira se encuentra en un campo magnético homogéneo cuyas líneas de inducción son perpendiculares al plano de la espira. La inducción del campo magnético varía uniformemente con el tiempo a la velocidad $\Delta B/\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ T/s. Determinar la carga del condensador.

3.179. Una bobina cortocircuitada de $n = 1000$ espiras de alambre se encuentra en un campo magnético cuyas líneas de inducción están dirigidas a lo largo del eje de la bobina. El área de la sección transversal de la bobina es $S = 40$ cm² y su resistencia, $R = 160 \Omega$. Hallar la potencia N de las pérdidas térmicas si la inducción del campo magnético varía uniformemente con el tiempo a la velocidad $\Delta B/\Delta t = 10^{-3}$ T/s.

3.180. Un cuadro rectangular de alambre, cuyo lado es L , se encuentra en un campo magnético de inducción B perpendicular a la superficie del cuadro. Por el cuadro, paralelamente a uno de sus lados y sin interrumpir el contacto, se desliza a velocidad constante v el puente ab (fig. 3.84), cuya resistencia es igual a R . Determinar la corriente a través del puente. La resistencia de la parte restante del cuadro se desprecia.

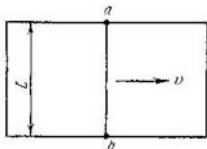


Fig. 3.84.

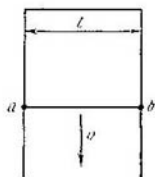


Fig. 3.85.

una de otra, dos varillas metálicas cerradas por arriba (fig. 3.85). El plano en que se encuentran las varillas es perpendicular a la dirección de la inducción del campo magnético. Por las varillas se desliza hacia abajo, con la velocidad constante $v = 1$ m/s, sin rozamiento y sin interrumpir el contacto, el puente ab , cuya masa es $m = 1$ g. Determinar la resistencia R del puente ab . La resistencia de la parte restante del sistema se desprecia.

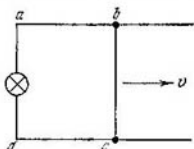


Fig. 3.86.

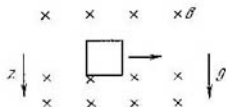


Fig. 3.87.

miento y sin interrumpir el contacto, el puente ab , cuya masa es $m = 1$ g. Determinar la resistencia R del puente ab . La resistencia de la parte restante del sistema se desprecia.

3.182. El plano del cuadro rectangular de alambre $abcd$ es perpendicular a un campo magnético homogéneo cuya inducción es $B = 10^{-3}$ T (fig. 3.86). El lado bc del cuadro, cuya longitud es $l = 1$ cm, puede deslizarse sin interrumpir el contacto, a la velocidad constante $v = 10$ cm/s, por los lados ab y dc . Entre los puntos a y d está conectada una lámpara de resistencia $R = 5 \Omega$. ¿Qué fuerza hay que aplicar al lado bc para efectuar el movimiento antedicho? La resistencia de la parte restante del cuadro se desprecia.

3.183. A un cuadro cuadrado de alambre, de masa m y lado a , se le comunica en dirección horizontal cierta velocidad inicial. El

cuadro se mueve en un campo gravitacional, encontrándose durante todo el tiempo en un campo magnético perpendicular al plano del cuadro (fig. 3.87). La inducción del campo varía según la ley $B(z) = B_0 + kz$, en la que k es un coeficiente constante. La resistencia del cuadro es igual a R . Al cabo de cierto tiempo el cuadro empieza a moverse con velocidad v constante. Hallar la velocidad horizontal inicial del cuadro. La aceleración de caída libre es igual a g .

3.184. La corriente en un solenoide superconductor cortocircuitado varía a causa de la imperfección del contacto. El campo

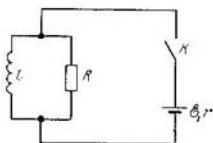


Fig. 3.88.

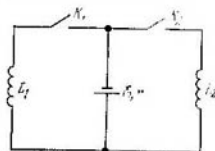


Fig. 3.89.

magnético creado por dicha corriente disminuye en un 2% por hora. Determinar la resistencia del contacto R si la inductancia del solenoide es $L = 1$ H.

3.185. Una bobina de inductancia L y una resistencia R acopladas en paralelo se conectan a través de un interruptor K a una batería de f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r (fig. 3.88). En el instante inicial el interruptor K está abierto y en el circuito no hay corriente. ¿Qué carga pasará a través de la resistencia R después de cerrar el interruptor? La resistencia de la bobina se desprecia.

3.186. Dos bobinas, cuyas inductancias son L_1 y L_2 , están conectadas a través de los interruptores K_1 y K_2 con una fuente de f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r (fig. 3.89). En el instante inicial ambos interruptores están abiertos. Después de haber cerrado el interruptor K_1 y de que la corriente que pasa a través de la bobina L_1 alcanza cierto valor I_0 , se cierra el interruptor K_2 . Determinar la corriente que se establece a través de las bobinas L_1 y L_2 después de cerrar el interruptor K_2 . Las resistencias de las bobinas se desprecian.

3.187. Dos bobinas de igual inductancia L están conectadas a través de los interruptores K_1 y K_2 a una fuente de f.e.m. continua $\mathcal{E}$ y resistencia interna r (fig. 3.90). En el instante inicial ambos interruptores están abiertos. Luego se cierra el interruptor K_1 . Determinar la corriente que pasa por el interruptor K_1 antes de cerrar el interruptor K_2 , si se sabe que la corriente que se establece a través del interruptor K_1 después de cerrar el K_2 es dos veces mayor que la corriente que se establece a través del interruptor K_2 . Las resistencias de las bobinas se desprecian.

3.188. Un condensador de capacidad C , cargado hasta la diferencia de potencial V , está conectado a través del interruptor K a

dos bobinas acopladas en paralelo cuyas inductancias son L_1 y L_2 (fig. 3.91). Si se cierra el interruptor K , al cabo de cierto tiempo el condensador se recarga totalmente (es decir, cambia de signo la tensión en el condensador). ¿Qué cargas q_1 y q_2 pasarán a través de las bobinas durante este tiempo? La resistencia de las bobinas se desprecia.

3.189. Un condensador de capacidad C , cargado, está conectado, a través de un interruptor K , con dos bobinas, cuyas inductancias son L_1 y L_2 , acopladas en paralelo (fig. 3.91). En el instante inicial

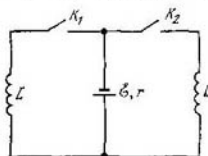


Fig. 3.90

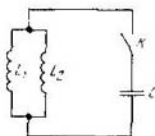


Fig. 3.91.

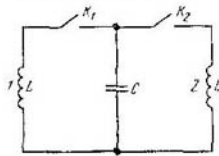


Fig. 3.92.

el interruptor está abierto. Si se cierra dicho interruptor, a través de las bobinas pasa corriente. La corriente máxima que pasa a través de la bobina L_1 resulta ser igual a I_1 . Hallar la carga inicial del condensador. Las resistencias de las bobinas se desprecian.

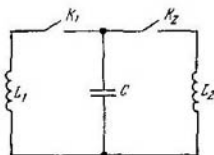


Fig. 3.93.

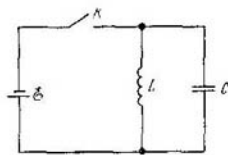


Fig. 3.94.

3.190. Dos bobinas, 1 y 2, de igual inductancia L están conectadas a través de los interruptores K_1 y K_2 con un condensador de capacidad C (fig. 3.92). En el instante inicial ambos interruptores están abiertos y el condensador, cargado hasta la diferencia de potencial V_0 . Primero se cierra el interruptor K_1 y, cuando la tensión en el condensador se anula, se cierra el K_2 . Determinar la tensión máxima en el condensador después de cerrar el interruptor K_2 . Las resistencias de las bobinas se desprecian.

3.191. Dos bobinas, cuyas inductancias son L_1 y L_2 , están conectadas a través de los interruptores K_1 y K_2 con un condensador de capacidad C (fig. 3.93). En el instante inicial ambos interruptores están abiertos y el condensador, cargado hasta la diferencia de potencial V_0 . Primero se cierra el interruptor K_1 y, cuando la tensión

en el condensador se anula, se cierra el K_2 . Determinar las corrientes máxima y mínima que pasan a través de la bobina L_1 después de cerrar el interruptor K_2 . Las resistencias de las bobinas se desprecian.

3.192. Un circuito oscilante formado por una bobina de inductancia L y un condensador de capacidad C , está conectado a través de un interruptor K a una fuente de f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r

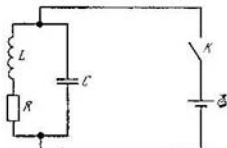


Fig. 3.95.

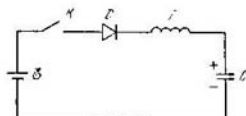


Fig. 3.96.

(fig. 3.94). Al principio el interruptor K está cerrado. Después que se establece el régimen estacionario, se abre el interruptor y en el circuito se producen oscilaciones de período T . En estas condiciones la amplitud de la tensión en el condensador es n veces mayor que la f.e.m. de la batería. Hallar la inductancia de la bobina y la capacidad del condensador. La resistencia de la bobina se desprecia.

3.193. Un circuito oscilante formado por un condensador de capacidad C , de una bobina de inductancia L y de una resistencia R , está conectado a través de un interruptor K a una fuente de f.e.m. continua $\mathcal{E}$ (fig. 3.95). Al cabo de cierto tiempo de haber cerrado el interruptor se establece el régimen estacionario: las corrientes en todos los elementos del circuito serán constantes. Después de esto se vuelve a abrir el interruptor K . ¿Qué cantidad de calor se desprende en la bobina después de abrir el interruptor? La resistencia interna de la batería se desprecia.

3.194. Un condensador de capacidad $C_1 = 1 \mu\text{F}$ está cargado hasta la diferencia de potencial $V_0 = 300 \text{ V}$. A él, a través de un diodo ideal D y de una bobina de inductancia L , se conecta un condensador de capacidad $C_2 = 2 \mu\text{F}$ descargado (fig. 3.96). ¿Hasta qué diferencia de potencial se cargará este condensador después de cerrar el interruptor K ? La inductancia L es suficientemente grande, por lo que el proceso de recarga se desarrolla lentamente.

3.195. En el circuito representado en la fig. 3.97 el condensador de capacidad C tiene la carga inicial q_0 . ¿Hasta qué diferencia de potencial se cargará el condensador si se cierra el interruptor K ? La f.e.m. de la batería es igual a $\mathcal{E}$. La resistencia interna de la batería se desprecia. El diodo D se considera ideal. La inductancia L es suficientemente grande, por lo que el proceso de carga es lento.

3.196. Un circuito oscilante formado por una bobina de inductancia L , un condensador de capacidad C y un diodo ideal D (fig. 3.98)

se conecta, a través del interruptor K , durante un tiempo τ , a una fuente de f.e.m. continua $\mathcal{E}$ y después se desconecta. Hallar la dependencia de la tensión en el condensador respecto del tiempo transcurrido después de abrir el interruptor. Representar gráficamente esta dependencia. La resistencia interna de la fuente y la resistencia de la bobina se desprecian.

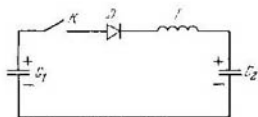


Fig. 3.97.

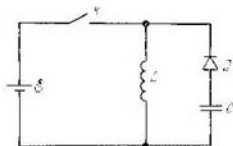


Fig. 3.98.

3.197. En el circuito representado en la fig. 3.99 la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}_0$ es mayor que la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}$. Determinar la carga que pasará a través de la batería de f.e.m. $\mathcal{E}_0$ cuando se cierre el interruptor K . La resistencia interna de la batería y la resistencia

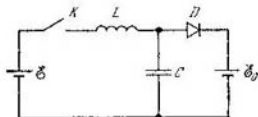


Fig. 3.99.



Fig. 3.100.

de la bobina se desprecian. El diodo D se considera ideal. El condensador de capacidad C está descargado hasta que se cierra el interruptor.

3.198. Sobre un núcleo de hierro, cuya forma se muestra en la fig. 3.100, están arrolladas dos bobinas. El flujo magnético que crea cada bobina no sale del núcleo de hierro y se divide en partes iguales entre sus ramificaciones. Cuando se conecta la bobina 1 a un circuito de corriente alterna de tensión $V_1 = 40$ V, la tensión en la bobina 2 es igual a V . ¿Qué tensión habrá en los terminales de la bobina 1, si la bobina 2 se conecta a un circuito de corriente alterna de tensión V ?

3.199. Sobre un núcleo de hierro simétrico están arrolladas dos bobinas (fig. 3.100). Cuando la bobina 1 se conecta a una red de corriente alterna, la tensión en los terminales de la bobina 2 es $V_2 = 13,2$ V. Cuando se conecta la bobina 2 a la misma red, la tensión en los terminales de la bobina 1 es $V_1 = 120$ V. Determinar la relación entre los números de espiras de las bobinas. Suponer que el flujo magnético creado por cada bobina no sale del núcleo.

3.200. Un motor eléctrico se alimenta de una batería de f. e.m. $\mathcal{E} = 12$ V. ¿Qué potencia N desarrollará el motor al pasar por su devanado una corriente $I = 2$ A, si cuando se frena totalmente el inducido pasa por el circuito una corriente $I_0 = 3$ A?

3.201. ¿A qué es igual el rendimiento de un motor eléctrico si al conectarlo a una red de corriente continua la corriente es $I_0 = 15$ A y en régimen estacionario la corriente desciende hasta $I = 9$ A?

3.202. Una locomotora eléctrica se mueve con la velocidad $v = 36$ km/h y desarrolla en promedio una fuerza de tracción $F = 5 \cdot 10^4$ N. Hallar la corriente que pasa por el motor de la locomotora (omitendo las pérdidas térmicas) si la tensión en él es $V = 500$ V.

3.203. ¿Qué f.e.m. desarrolla un generador de corriente continua si cuando la resistencia del circuito es $R = 300 \Omega$ se gasta en hacer girar el rotor la potencia $N = 50$ W y las pérdidas en rozamiento constituyen un $\alpha = 4\%$ de la potencia suministrada? ¿Qué potencia habrá que suministrarle al generador para mantener el mismo número de revoluciones cuando la resistencia del circuito sea $R_1 = 60 \Omega$?

3.204. Un motor eléctrico de corriente continua, conectado al circuito de una batería de f.e.m. $\mathcal{E}_0 = 24$ V, si la resistencia total del circuito es $R = 20 \Omega$, da $n_1 = 600$ r.p.m. cuando la corriente en el circuito es $I = 0.2$ A. ¿Qué fuerza electromotriz desarrollaría este mismo motor, funcionando como generador, a $n_2 = 1400$ r.p.m.?

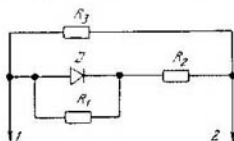


Fig. 3.101.

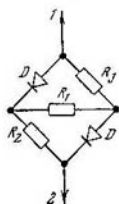


Fig. 3.102.

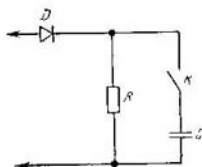


Fig. 3.103.

3.205. Un soldador eléctrico de potencia $N = 50$ W está calculado para conectarse a la red de corriente alterna de tensión $V = 127$ V. ¿Qué potencia se desprenderá en el soldador si se conecta a una red de corriente alterna de tensión $V_1 = 220$ V en serie con un dipolo ideal? La resistencia del soldador supóngase constante.

3.206. ¿Qué potencia se disipa en el circuito de corriente alterna representado en la fig. 3.101? A los bornes 1 y 2 está aplicada una

tensión $V = 220 \text{ V}$; la resistencia $R_1 = R_2 = R_3 = 200 \Omega$. En paralelo a la resistencia R_1 está acoplado un diodo ideal D .

3.207. ¿Qué potencia se disipa en la resistencia $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ en el circuito de corriente alterna representado en la fig. 3.102? A los bornes 1 y 2 está aplicada una tensión $V = 127 \text{ V}$; la resistencia $R_2 = R_3 = 5 \text{ k}\Omega$. El diodo D considérese ideal.

3.208. Un rectificador eléctrico, con elemento rectificador ideal, está conectado a una red de corriente alterna de tensión $V = 220 \text{ V}$ y frecuencia $f = 50 \text{ Hz}$ (fig. 3.103). ¿Cuántas veces disminuirá la potencia que se disipa en la resistencia R al cerrar el interruptor K , si se sabe que durante el período de la corriente alterna el condensador de capacidad C prácticamente no tiene tiempo de descargarse a través de la resistencia? ¿Qué condición deben cumplir los parámetros del circuito?

IV. ÓPTICA

Reflexión y refracción de la luz

4.1. Las dimensiones de la ventanilla trasera de un automóvil son $B \times H = 120 \times 45 \text{ cm}^2$. El conductor va sentado a la distancia $l = 2 \text{ m}$ de dicha ventanilla. ¿Qué dimensiones mínimas debe tener el espejo retrovisor plano, suspendido a la distancia $l_0 = 0,5 \text{ m}$ delante del conductor, para que éste vea lo mejor posible lo que ocurre en la carretera detrás del automóvil?

4.2. Una lámina de vidrio de espesor $d = 3 \text{ mm}$ tiene unas rayitas en sus caras superior e inferior. ¿A qué es igual el índice de refracción del vidrio si al pasar el enfoque del microscopio de la rayita superior a la inferior hubo que bajar el tubo una distancia $l = 2 \text{ mm}$? Los ángulos de desviación, respecto del eje del microscopio, de los rayos que llegan al objetivo considérense pequeños.

4.3. Un palo quebrado en su mitad se halla sumergido en un estanque de manera que a un observador que se encuentra en la orilla y que mira a lo largo de la parte del palo que emerge del agua, le parece que éste es recto y que forma el ángulo α con el horizonte. ¿Qué ángulo forman las dos partes del palo? El índice de refracción del agua es $n = 4/3$.

4.4. En el fondo de un recipiente lleno de agua hay un espejo plano. Un individuo se inclina sobre el recipiente y ve la imagen de su ojo en el espejo a la distancia de visión óptima $d = 25 \text{ cm}$, siendo la distancia desde el ojo hasta la superficie del agua $h = 5 \text{ cm}$. Determinar la profundidad del recipiente. El índice de refracción del agua es $n = 4/3$.

4.5. ¿Bajo qué ángulo incide un rayo luminoso sobre la superficie plana de un vidrio, si los rayos reflejado y refractado forman entre sí un ángulo recto? La velocidad de la luz en el vidrio es $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

4.6. Un prisma isósceles de vidrio con pequeños ángulos de refringencia α se introduce en un haz de rayos paralelos que inciden normalmente sobre su base (fig. 4.1). El índice de refracción del vidrio es $n = 1,57$ y la anchura de la base, $2a = 5$ cm. Hallar el ángulo de refracción α si en medio de una pantalla, situada a la distancia $L = 100$ cm del prisma, se forma una franja oscura cuya anchura es $2d = 1$ cm.

4.7. En la fig. 4.2 se muestra la marcha simétrica de un rayo en un prisma isósceles con ángulo en el vértice $\alpha = 30^\circ$ (dentro del

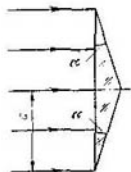


Fig. 4.1.

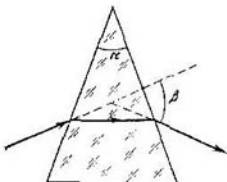


Fig. 4.2.

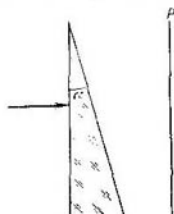


Fig. 4.3.

prisma el rayo se propaga paralelamente a la base). Hallar el ángulo β de desviación del rayo. El índice de refracción del prisma es $n = 2$.

4.8. Un líquido se echa en una cubeta que tiene la forma de prisma isósceles con ángulo en el vértice α . El prisma se ilumina con un haz de luz paralelo, de modo que los rayos dentro del líquido marchan paralelamente a la base. Resulta que el ángulo de desviación del haz emergente, respecto de la dirección inicial de propagación, es igual a β . Hallar el índice de refracción del líquido.

4.9. Sobre una cuña de vidrio incide perpendicularmente a una de sus caras un rayo de luz delgado (fig. 4.3). El índice de refracción del vidrio es $n = 1,41$ y el ángulo en el vértice $\alpha = 10^\circ$. ¿Cuántas manchas brillantes se verán en la pantalla colocada detrás de la cuña?

4.10. Dos prismas rectangulares iguales, con ángulo en el vértice α , tienen índices de refracción algo distintos. Los prismas se acoplan uno a otro como indica la fig. 4.4. Cuando este sistema se ilumina con un haz de luz paralelo que incide normalmente sobre la cara delantera, resulta que el haz de luz emergente se desvía de la dirección de propagación un ángulo φ . ¿En cuánto se diferencian entre sí los índices de refracción de los prismas? Los ángulos φ y α son pequeños.

4.11. En la fig. 4.5 se da la marcha de un rayo en un prisma isósceles, que antes y después del prisma se propaga paralelamente a la base de éste. Demostrar que para cualquier índice de refracción del prisma $n > 1$, en el punto A se produce la reflexión total.

4.12. En la fig. 4.6 se da la marcha de un rayo en un prisma isósceles con ángulo en el vértice recto. ¿Con qué ángulos de incidencia α emergerá del prisma el rayo después de experimentar dos veces la reflexión total en las caras AB y BC ? El índice de refracción del prisma es $n = 2$.

4.13. Para invertir la imagen se utiliza frecuentemente el prisma de Dove (fig. 4.7), que consiste en un prisma isósceles rectangular

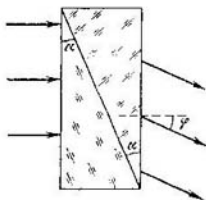


Fig. 4.4.

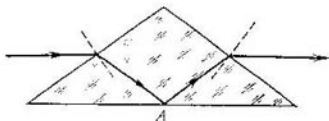


Fig. 4.5.

truncado. Determinar la longitud mínima de la base del prisma con la cual un haz luminoso que llene por completo la cara lateral pasará totalmente a través del prisma. La altura del prisma es $h = 2,1$ cm. El índice de refracción del vidrio, $n = 1,41$.

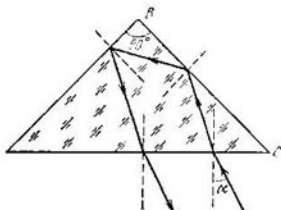


Fig. 4.6.

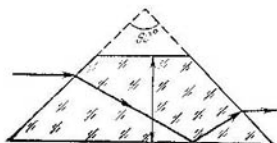


Fig. 4.7.

4.14. En un prisma isósceles rectangular de vidrio la base AC y la cara lateral BC son lisas y la cara AB , mate. El prisma descansa con su base sobre un periódico. El observador que mira a través de la cara lisa BC ve una parte $k = 0,895$ (de la superficie) del texto que hay debajo de la base AC . ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?

4.15. Sobre una lámina plano paralela de vidrio incide, bajo un ángulo α , un haz luminoso de anchura a (fig. 4.8), que consta de dos componentes espectrales (cuyas longitudes de onda son λ_1 y λ_2). Los índices de refracción del vidrio para estas longitudes de onda son:

n_1 (para λ_1) y n_2 (para λ_2). Determinar el espesor mínimo d de la lámina con el cual la luz, después de pasar por ella, se propaga en forma de dos haces independientes constituidos cada uno por un solo componente espectral.

4.16. La luz de una fuente lejana, compuesta de luz roja y verde, en forma de haz paralelo, incide perpendicularmente sobre una de las caras refractoras de un prisma de pequeño ángulo refringente α . Detrás del prisma está colocada una lente de distancia focal f , de modo que su eje óptico coincide con la dirección del haz de luz que incide sobre el prisma. Resulta que la distancia entre las imágenes de la fuente en el plano focal de la lente, en luz roja y en luz verde, es l . Determinar la diferencia entre los índices de refracción de prisma para la luz roja y para la luz verde. Los ángulos de desviación de los rayos respecto del eje óptico de la lente considérense pequeños.

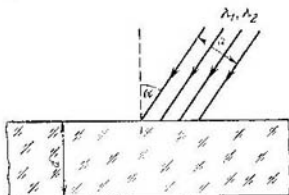


Fig. 4.8.

4.17. En el espectro de emisión de un láser de argón las rayas más intensas son las que tienen las longitudes de onda $\lambda_1 = 488 \text{ nm}$

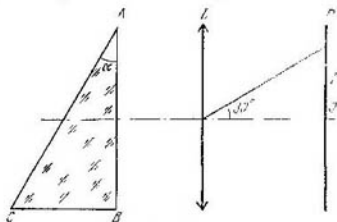


Fig. 4.9.

y $\lambda_2 = 515 \text{ nm}$. ¿Con qué ángulos de refringencia α del prisma, interpuesto en el camino de los rayos, emergerá de él un haz que contenga la componente λ_2 y no contenga la componente λ_1 ? Sobre la primera cara del prisma los rayos inciden normalmente. La dependencia entre el índice de refracción del prisma y la longitud de onda tiene la forma $n = 1 + a/\lambda^2$, donde $a = 2,38 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2$.

4.18. Para medir el índice de refracción n de un prisma de vidrio con ángulo en el vértice $\alpha = 30^\circ$ se utilizó el esquema que muestra la fig. 4.9. El prisma se ponía delante de una lente convergente de modo que la cara AB fuera perpendicular al eje óptico de la lente. En el plano focal de la lente se colocaba una pantalla, sobre la cual, cuando la cara AC se iluminaba con luz difusa, se podían observar

dos regiones: una iluminada y otra no iluminada. El segmento que en el esquema une los límites entre las regiones (punto D) con el centro de la lente resultó que formaba un ángulo de 30° con el eje óptico de la lente. Determinar el índice de refracción n del prisma.

4.19. En el fondo de un recipiente lleno de agua hasta la altura h se encuentra una fuente puntual de luz S . Sobre la superficie del agua flota un disco redondo, de modo que el centro del disco se

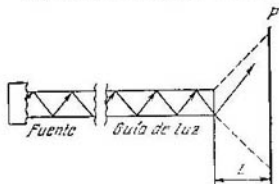


Fig. 4.10.

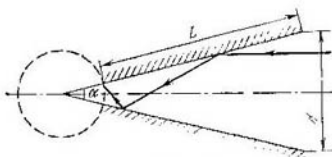


Fig. 4.11.

halla sobre la fuente de luz. ¿Qué radio mínimo debe tener el disco para que ni un solo rayo de luz salga a través de la superficie del agua? El índice de refracción del agua es igual a n .

4.20. Un recipiente rectangular de vidrio está lleno de un líquido e iluminado desde abajo por una lámpara, situada debajo del recipiente cerca de su fondo. ¿Qué índice de refracción mínimo debe tener el líquido para que sea imposible ver la lámpara a través de las paredes laterales del recipiente?

4.21. Un guía de luz (hilo fino largo, de material transparente) con índice de refracción $n = 1,2$ tiene uno de sus extremos apretado contra una fuente de luz difusa y el otro extremo se encuentra a la distancia $L = 5$ cm de una pantalla (fig. 4.10). Hallar el diámetro de la mancha brillante en la pantalla.

4.22. Un haz de hilos finos, largos, de material transparente, con índice de refracción $n = 1,41$ forma un guía de luz. ¿Bajo qué ángulo máximo $\varphi_{\text{máx}}$ con el eje del guía de luz puede incidir un rayo luminoso sobre el extremo de éste para recorrer el guía sin debilitarse?

4.23. Dos espejos planos de igual anchura $L = 5$ cm, colocados formando un ángulo $\alpha = 12^\circ$ entre ellos (fig. 4.11), constituyen un guía de luz. La distancia entre los bordes de la derecha de los espejos es $d = 2$ cm. Los bordes izquierdos se apoyan sobre la superficie cilíndrica sensible a la luz de un fotorreceptor. ¿Bajo qué ángulo máximo $\varphi_{\text{máx}}$ con el eje del guía de luz puede incidir un rayo luminoso para llegar al fotorreceptor?

4.24. Un tubo capilar de vidrio se ha llenado de un líquido (fig. 4.12) cuyo índice de refracción n es menor que el índice de refracción del vidrio n_v . ¿Con qué relación entre los radios interior r y exterior R del capilar cualquier rayo que incida sobre la superficie exterior del tubo penetrará parcialmente en el líquido?

4.25. Dentro de un tubo capilar de vidrio hay un gas a baja presión en el cual se ha encendido una descarga eléctrica de modo que toda la columna de gas es una fuente de emisión difusa. ¿Bajo qué ángulo máximo $\varphi_{\text{máx}}$ con un radio puede salir un rayo de luz a través de la pared exterior del tubo? Los radios interior y exterior del capilar son $r = 2 \text{ mm}$ y $R = 4 \text{ mm}$.

4.26. Un observador mira un pez que se halla en el punto diametralmente opuesto a él de un acuario esférico de radio R . ¿Cuál

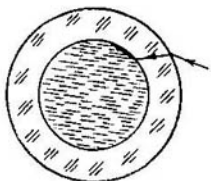


Fig. 4.12.

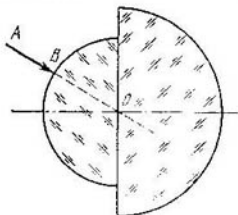


Fig. 4.13.

será el desplazamiento de la imagen del pez respecto del pez mismo? El índice de refracción del agua es $n = 4/3$.

4.27. Hay dos semiesferas concéntricas de vidrio con distintos índices de refracción (fig. 4.13). Construir la marcha del rayo AB

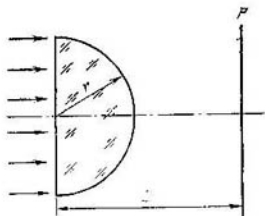


Fig. 4.14.

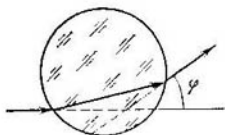


Fig. 4.15.

si la relación entre los radios es igual a la relación entre los índices de refracción.

4.28. Sobre la mitad de una esfera de radio $r = 2 \text{ cm}$ hecha de vidrio con índice de refracción $n = 1,41$, incide un haz de rayos paralelos (fig. 4.14). Determinar el radio de la mancha brillante que se formará sobre la pantalla situada a la distancia $L = 4,82 \text{ cm}$ del centro de la esfera.

4.29. Un haz de rayos paralelos incide sobre una esfera de vidrio. Los rayos, después de refractarse dos veces en el límite vidrio—

aire (fig. 4.15) emergen de la esfera siguiendo direcciones que forman con la inicial un ángulo φ que no supera 90° . Determinar el índice de refracción del vidrio.

4.30. La posición de una estrella, vista desde la Tierra, difiere un poco de la real a causa de la refracción de los rayos en la atmósfera. Determinar el error al fijar la posición angular de una estrella que desde la Tierra se ve bajo un ángulo de 45° con la vertical. El índice de refracción del aire cerca de la superficie de la Tierra es $n = 1,0003$.

4.31. Recibiendo en la Tierra la señal radiada por un satélite artificial se puede determinar su posición angular. La refracción de

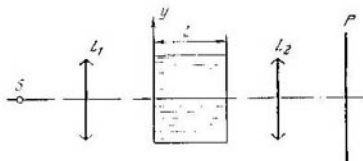


Fig. 4.16.

las ondas hertzianas en la atmósfera origina un pequeño error. Así, para un satélite observado bajo un ángulo de 45° con la vertical, el error es de 2 min. ang. Determinar el índice de refracción de las ondas hertzianas en la capa de la atmósfera próxima a la Tierra.

4.32. Un recipiente plano paralelo de vidrio está colocado entre dos lentes convergentes delgadas perpendicularmente al eje óptico de ellas (fig. 4.16). Una fuente puntual de luz S se encuentra en el foco de la lente L_1 . Sobre la pantalla P se observa la imagen de la fuente cuando el recipiente está vacío. Hallar el desplazamiento vertical de dicha imagen si el recipiente se llena de un líquido transparente cuyo índice de refracción varía con la altura según la ley $n(y) = n_0 + \alpha y$. El espesor de la capa de líquido es E y la distancia focal de la lente L_2 es igual a f . Considérese que la variación del índice de refracción con la altura es pequeña dentro de los límites del diámetro del haz luminoso.

Lentes delgadas

4.33. En la fig. 4.17 se representa una fuente puntual de luz S , su imagen S_1 obtenida por medio de una lente, y el eje óptico de la lente OO_1 . Determinar, por construcción, la posición de la lente y hallar su foco. ¿La imagen dada, es virtual o real?

4.34. En la fig. 4.18 se da la marcha del rayo ABC a través de una lente divergente. Determinar, por construcción, el foco de la lente.

4.35. En la fig. 4.19 se da la marcha del rayo ABC a través de una lente convergente. Construir la marcha de un rayo arbitrario DE . Estudiar los casos en que el punto de intersección de los rayos AB y DE se encuentra a la izquierda y a la derecha de la lente.

4.36. En la fig. 4.20 se representa una fuente puntual de luz S , su imagen S_1 , obtenida por medio de una lente convergente, y el foco

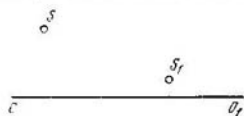


Fig. 4.17.

F de la lente más próximo a la fuente. Las distancias $SK = l$ y $SS_1 = L$ se dan. Determinar la posición de la lente y su distancia focal.

4.37. Con una lente convergente se obtienen las imágenes de dos fuentes puntuales A y B . La fuente A se encuentra en el eje óptico a

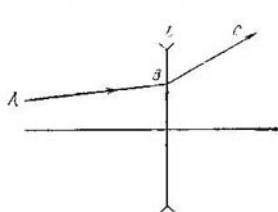


Fig. 4.18.

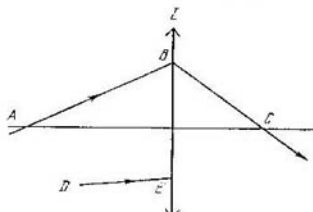


Fig. 4.19.

una distancia de la lente igual al duplo de la distancia focal; la fuente B está desplazada del eje una distancia pequeña, de modo que la recta que une ambas fuentes forma con el eje óptico un ángulo $\varphi = 30^\circ$

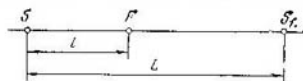


Fig. 4.20.

(fig. 4.21). ¿Bajo qué ángulo con el eje óptico hay que colocar la pantalla plana P para obtener simultáneamente sobre ella las imágenes nítidas de ambas fuentes?

4.38. ¿A qué distancia a de una lente convergente hay que colocar un objeto para que la distancia entre él y su imagen real sea mínima? La distancia focal de la lente es igual a f .

4.39. La distancia entre una fuente puntual de luz y una pantalla es igual a L . Entre ellas se coloca una lente que produce sobre la pantalla una imagen nítida en dos posiciones, entre las cuales hay una distancia igual a l . Determinar la distancia focal de la lente.

4.40. La distancia, medida sobre el eje, entre un objeto y su imagen directa producida por una lente es $l = 5$ cm. El aumento lineal

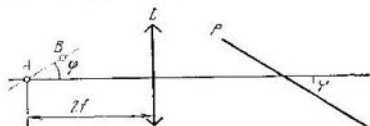


Fig. 4.21.

de la lente es $\beta = 0.5$. Determinar la distancia focal de la lente.

4.41. Sobre una pantalla se obtiene, por medio de una lente, la imagen de un objeto con el aumento $\beta = 2$. ¿Cuál será el aumento si la distancia entre el objeto y la pantalla se hace 1,6 veces mayor?

4.42. Una lente con distancia focal $f = 12$ cm crea sobre una pantalla la imagen de un objeto con el aumento $\beta_1 = 9$. Otra lente, con la misma distancia entre el objeto y la pantalla, produce un aumento $\beta_2 = 3$. Hallar la distancia focal de la segunda lente.

4.43. Una lámpara para obtener haces luminosos dirigidos consta de una fuente puntual de luz y de una lente de diámetro $D = 6$ cm, cuya distancia focal es $f = 15$ cm. ¿A qué distancia de la lente debe colocarse la fuente para que los rayos que pasan a través de aquella formen en la pantalla una mancha luminosa de diámetro $d = 4$ cm? La distancia desde la lente hasta la pantalla es $L = 100$ cm.

4.44. Un objeto y su imagen directa se encuentran simétricamente situados respecto del foco de una lente. La distancia desde el objeto hasta el foco de la lente es $l = 4$ cm. Hallar la distancia focal de la lente.

4.45. La distancia desde el foco posterior de una lente convergente hasta la imagen es 9 veces mayor que la distancia desde el foco anterior hasta el objeto. Hallar el aumento de la lente.

4.46. Por medio de una lente se obtiene la imagen real de un objeto con el aumento $\beta = 1.5$. Después la lente se traslada una distancia $l = 12$ cm y se obtiene una imagen virtual del mismo tamaño. Determinar la distancia focal de la lente.

4.47. Una lente, que produce la imagen real de un objeto, se traslada una distancia igual a su distancia focal. Con esto se obtiene una imagen virtual del mismo tamaño. Hallar el aumento de la lente.

4.48. La dependencia del aumento β respecto de la distancia b entre una lente y la pantalla sobre la cual se obtiene la imagen del objeto (fig. 4.22), se ha determinado experimentalmente. Hallar la distancia focal de la lente.

4.49. Un objeto en forma de segmento de longitud l está situado a lo largo del eje óptico de una lente convergente de distancia focal f . El centro del segmento se halla a la distancia a de la lente y ésta produce una imagen real de todos los puntos del objeto. Determinar el aumento lineal del objeto.

4.50. Por medio de una lente convergente de distancia focal f se obtiene la imagen real tridimensional de un cubo transparente cuya arista es l . La imagen de la cara del cubo más próxima a la lente se encuentra a la distancia $2f$ de ésta. Hallar el volumen de la imagen obtenida.

4.51. Una fuente puntual de luz se encuentra a la distancia $a = 30$ cm de una lente convergente cuyo poder óptico $D = 5$ dptr. ¿A qué distancia se desplazará la imagen de la fuente si entre la lente y la fuente se coloca una lámina de vidrio gruesa de espesor $L = 15$ cm con índice de refracción $n = 1,57$?

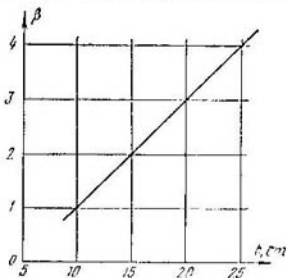


Fig. 4.22.

4.52. La lente convergente L_1 produce en el punto S_1 una imagen real de la fuente S situada en el eje óptico de la lente (fig. 4.23). Entre la lente L_1 y la imagen S_1 se coloca una lente divergente L_2 , cuyos focos ocupan las posiciones que se dan. Hallar, por construc-

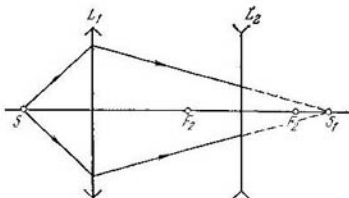


Fig. 4.23.

ción, la nueva posición de la imagen de la fuente. Considerar el caso en que la distancia entre S_1 y L_2 es mayor que la distancia focal de la lente L_2 .

4.53. Una lente convergente L_1 produce en el punto S_1 la imagen real de una fuente puntual S situada en el eje óptico de la lente (fig. 4.24). Entre la fuente S y la lente L_1 se coloca otra lente convergente L_2 , cuyos focos ocupan las posiciones que se dan. Hallar, por construcción, la nueva posición de la imagen de la fuente. Con-

siderar el caso en que la distancia entre S y L_2 es menor que la distancia focal de la lente L_2 .

4.54. Una fuente de luz se encuentra en el eje de una lente convergente, a una distancia igual al duplo de la distancia focal de ésta. Detrás de la lente y perpendicular al eje óptico se coloca un espejo plano. ¿A qué distancia de la lente hay que poner el espejo para que los rayos reflejados en él, después de pasar por segunda vez a través de la lente, sean paralelos?

4.55. Un observador decidió mirar su propio ojo valiéndose de una lente (de distancia focal $f = 10$ cm) y de un espejo plano. La

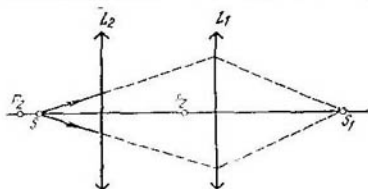


Fig. 4.24.

lente la colocó a la distancia $a = 15$ cm del ojo. ¿A qué distancia, detrás de la lente, tuvo que poner el espejo para que la imagen del ojo resultara estar a la distancia de visión óptima $d = 25$ cm?

4.56. Un observador mira la imagen de su ojo en un espejo plano situado a la distancia $a = 20$ cm. Si en el camino de los rayos se coloca una lente convergente muy cerca del espejo, la dimensión angular de la imagen aumenta $\gamma = 1,5$ veces*). En este caso la imagen sigue siendo virtual. ¿Cuál es la distancia focal de la lente?

4.57. Una fuente de luz se encuentra a la distancia $a_1 = 120$ cm de una lente convergente de distancia focal $f_1 = 30$ cm. Por el otro lado de la lente, en su plano focal, hay una lente divergente. ¿Cuál es la distancia focal f_2 de la lente divergente si los rayos, después de pasar por la segunda lente, parecen que salen de la misma fuente?

4.58. Una fuente de luz se encuentra a la distancia $a_1 = 20$ cm de una lente convergente de distancia focal $f = 12$ cm. ¿A qué distancia, detrás de la lente convergente, hay que poner una lente divergente de distancia focal $f_2 = -16$ cm para que la imagen de la fuente de luz siga siendo real? La fuente se halla en el eje óptico del sistema.

4.59. Dos lentes convergentes, cuyas distancias focales son f_1 y $f_2 = 3f_1$, se encuentran a la distancia $2f_1$ una de otra. El objeto se halla en el eje óptico por el lado de la lente de distancia focal más

*) Se llama aumento angular la relación entre las tangentes de los ángulos que forman los rayos que salen y que entran en el sistema óptico con el eje óptico del mismo.

corta. ¿Para qué posiciones del objeto da una imagen directa (derecha) este sistema óptico?

4.60. Un sistema óptico está formado por dos lentes, cuyas distancias focales son iguales $f_1 = f_2 = f$, situadas a la distancia $l = f/2$ una de otra. ¿Para qué posiciones del objeto su imagen será virtual? El objeto se halla en el eje óptico del sistema.

4.61. Un sistema óptico está formado por dos lentes, cuyas distancias focales son $f_1 = +5$ cm y $f_2 = -5$ cm, separadas por una distancia $l = 5$ cm. ¿Para qué posiciones del objeto (por el lado de la lente L_1) dará una imagen virtual este sistema?

4.62. Un sistema óptico consta de dos lentes, cuyas distancias focales son $f_1 = -10$ cm y $f_2 = +10$ cm, separadas por una distancia $l = 5$ cm. ¿Para qué posiciones del objeto (por el lado de la lente L_1) dará una imagen real este sistema?

4.63. Dos lentes convergentes, cuyas distancias focales son f_1 y f_2 , están situadas en un mismo eje. Con este sistema de lentes se obtiene la imagen de un objeto, resultando que el tamaño de la imagen no depende de la distancia entre el objeto y el sistema de lentes. Hallar la distancia l entre las lentes.

4.64. Dos lentes convergentes distintas se encuentran entre sí a la distancia $l = 60$ cm, igual a la suma de sus distancias focales. Si a la distancia $a = 80$

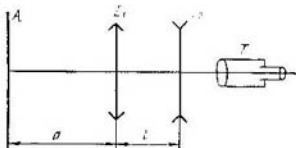


Fig. 4.25.

cm delante de una de las lentes se coloca un objeto, su imagen se encontrará a la distancia $b = 10$ cm detrás de la segunda lente. Determinar las distancias focales de las lentes.

4.65. Un sistema óptico consta de dos lentes: una convergente de distancia focal $f_1 = 30$ cm y otra divergente de distancia focal $f_2 = -30$ cm. Las lentes están dispuestas de tal modo que sus ejes ópticos principales coinciden. Un haz de rayos paralelos incide sobre la primera lente y, después de atravesar el sistema, converge en cierto punto situado en el eje óptico. ¿Cuánto se desplazará este punto si las lentes se cambian de sitio entre sí?

4.66. Para determinar la distancia focal de una lente divergente, en un banco de óptica se colocaron (fig. 4.25): la regla graduada a escala AB ; una lente convergente de distancia focal $f_1 = 10$ cm, situada a la distancia $a = 15$ cm de la regla; la lente divergente a investigar y un anteojo T , enfocado al infinito (es decir, ajustado para observar objetos lejanos). Resultó que si la lente divergente se colocaba a la distancia $l = 10$ cm de la convergente, en el ocular del anteojo se observaba una imagen clara de la regla. Determinar la distancia focal f_2 .

4.67. Un objetivo consta de dos lentes: una convergente de distancia focal $f_1 = 20$ cm y otra divergente de distancia focal $f_2 =$

$= -10$ cm. Las lentes están situadas a la distancia $l = 15$ cm una de otra. Con este objetivo se obtiene sobre una pantalla la imagen del Sol. ¿Qué distancia focal f debe tener una lente para que la imagen del Sol obtenida con ella tenga el mismo tamaño que la obtenida con el objetivo?

4.68. A la derecha de una lente convergente L_1 , de distancia focal $f_1 = 2$ cm, se encuentra una lente divergente L_2 . Los ejes de las lentes coinciden y la distancia entre ellas es igual a l . Este sistema produce una imagen real de un objeto. Después la lente L_2 se coloca a la izquierda de la L_1 a la distancia l de ella. Con esto la posición mutua de la lente L_1 y el objeto no varía. El sistema vuelve a dar una imagen real del objeto y sus dimensiones siguen siendo las de antes. Determinar la distancia l .

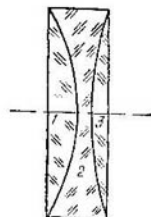


Fig. 4.26.

4.69. Un objetivo consta de dos lentes convergentes cuyas distancias focales son $f_1 = 5$ cm y $f_2 = 15$ cm. Las lentes están situadas a la distancia $l = 10$ cm una de otra. Determinar la posición de los focos principales del objetivo.

4.70. Un objetivo consta de dos lentes: una convergente de distancia focal $f_1 = 15$ cm y otra divergente de distancia focal $f_2 = -15$ cm. Las lentes están situadas a la distancia $l =$

10 cm una de otra. Determinar la posición de los focos principales del objetivo.

4.71. Con un sistema de dos lentes convergentes se observa una pared que se encuentra a la distancia $a = 100$ m de la lente delantera. El foco posterior de la primera lente y el foco anterior de la segunda, coinciden. La distancia entre las lentes es $l = 30$ cm. El aumento angular del sistema es $\gamma = 1/2$. En el plano focal de la primera lente hay un diafragma cuyo diámetro es $d = 4$ mm. ¿Qué dimensiones tendrá el trozo de la pared que se ve a través de este sistema?

4.72. Un sistema de dos lentes, una convergente L_1 y otra divergente L_2 , tiene el aumento angular $\gamma = 25$. El foco posterior de la lente L_1 coincide con el foco anterior de la lente L_2 . A través de este sistema la luz de una estrella incide sobre un fotorreceptor situado inmediatamente detrás de la lente L_2 . ¿Qué diámetro debe tener la lente L_2 para que se vea totalmente la superficie sensible del fotorreceptor, cuyo diámetro $d = 4$ mm?

4.73. Demostrar que la potencia óptica de un sistema formado por dos lentes en contacto directo una con otra es igual a la suma de las potencias ópticas de dichas lentes.

4.74. De una lámina de vidrio plano paralela se hacen tres lentes (fig. 4.26). La distancia focal de las lentes 1 y 2 juntas resulta ser $f_{12} < 0$; la distancia focal de las lentes 2 y 3, también juntas, es $f_{23} < 0$. Suponiendo que las lentes son delgadas, hallar la distancia focal de cada una de las lentes.

4.75. Dos lentes planoconvexas juntas por sus caras planas forman una lente de distancia focal f_1 . Hallar la distancia focal f_2 de la lente que se obtiene si las mismas lentes se juntan por las caras convexas y el espacio entre ellas se llena de agua. Los índices de refracción del vidrio y del agua son iguales respectivamente a $n = 1,66$ y $n_a = 1,33$.

4.76. Dos lentes planocóncavas juntas por sus caras planas forman una lente de distancia focal f_1 . Hallar la distancia focal f_2 de la lente que se obtiene si las mismas lentes se juntan por sus caras

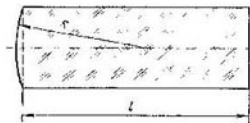


Fig. 4.27.



Fig. 4.28

cóncavas y el espacio que queda entre ellas se llena de agua. Los índices de refracción del vidrio y del agua son respectivamente $n = 1,66$ y $n_a = 1,33$.

4.77. Si una lente se sumerge en agua ($n_1 = 1,33$) su distancia focal será igual a 1 m. Si se sumerge en bisulfuro de carbono ($n_2 = 1,6$) su distancia focal crece hasta 10 m. Hallar la distancia focal de la lente en el aire.

4.78. Una lente planoconvexa gruesa, de espesor $l = 5$ cm y radio de curvatura de la parte convexa $R = 2,5$ cm, está hecha de vidrio con índice de refracción $n = 1,5$ (fig. 4.27). ¿Dónde se encuentran los focos de esta lente? Suponer que los ángulos de refracción son pequeños.

4.79. Una lente planocóncava, de espesor $l = 6$ cm (fig. 4.28) y radio de curvatura de la parte cóncava $R = 3$ cm, está hecha de vidrio con índice de refracción $n = 1,5$. ¿A qué distancia de la superficie plana se hallan los focos de esta lente? Suponer que los ángulos de refracción son pequeños.

Espejos esféricos

4.80. Valiéndose de un espejo esférico se ha obtenido la imagen A_1B_1 del objeto AB (fig. 4.29). Determinar, por construcción, la posición del espejo y de su foco. ¿El espejo es cóncavo o convexo?

4.81. Con un espejo esférico se ha obtenido la imagen A_1B_1 del objeto AB (fig. 4.30). Determinar, por construcción, la posición del espejo y de su foco.

4.82. La imagen S_1 de una fuente puntual S ha sido obtenida con un espejo esférico cóncavo cuyo centro de curvatura se halla en el punto O (fig. 4.31). Las distancias $SO = l$ y $SS_1 = L$ se conocen.

Determinar la distancia focal del espejo y establecer con qué relación entre l y L tiene solución este problema.

4.83. Para obtener un haz de luz dirigido, en un proyector se utiliza como reflector un espejo esférico cóncavo de diámetro $D = 20$ cm y distancia focal $f = 1$ m. ¿A qué distancia a del espejo se

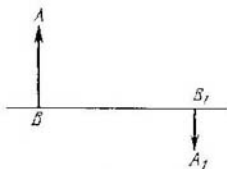


Fig. 4.29.



Fig. 4.30.

debe poner la fuente puntual de luz para que los rayos reflejados en el espejo formen sobre una pared una mancha brillante de diámetro $d = 40$ cm? La distancia desde el espejo hasta la pared es $L = 12$ m.

4.84. En el foco del espejo esférico de un proyector está situada una fuente de luz en forma de disco luminoso de radio $r = 1$ cm.



Fig. 4.31.

Hallar el diámetro de la mancha iluminada sobre una pared que se encuentra a la distancia $L = 500$ m del proyector, si la distancia focal del espejo esférico es $f = 4$ m y el diámetro del espejo, $d = 1$ m.

4.85. Un espejo esférico cóncavo da una imagen real tres veces mayor que el objeto. Determinar la distancia focal del espejo, si la distancia entre el objeto y su imagen es $l = 20$ cm.

4.86. Dos espejos esféricos cóncavos iguales están colocados uno frente a otro a una distancia igual a cuatro distancias focales. En el foco de uno de los espejos se encuentra una fuente de luz. Hallar las posiciones de las imágenes de la fuente.

4.87. Dos espejos esféricos cóncavos iguales están colocados uno frente a otro de modo que sus focos principales coinciden. Un punto luminoso S se encuentra en el eje común a la distancia a del primer espejo. ¿Dónde se obtendrá la imagen después de reflejarse los rayos en ambos espejos?

4.88. Unos rayos convergentes inciden sobre un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura $R = 60$ cm, de modo que sus prolonga-

gaciones se cortan en el punto S del eje del sistema, a la distancia $a = 15$ cm detrás del espejo. ¿A qué distancia del espejo se encontrarán estos rayos después de reflejarse? ¿Será real su punto de intersección?

4.89. Unos rayos convergentes inciden sobre un espejo esférico convexo de radio de curvatura $R = 60$ cm, de modo que sus prolongaciones se cortan en el punto S del eje del sistema, a la distancia $a = 15$ cm detrás del espejo. ¿A qué distancia del espejo se encontrarán estos rayos después de reflejarse? ¿Será real su punto de intersección? Resuelve este problema para $R = 60$ cm y $a = 40$ cm.

4.90. Un observador mira un espejo esférico cóncavo y ve en él la imagen directa (derecha) de su ojo. La dimensión angular de esta imagen es $\gamma = 1,8$ veces mayor que la de la imagen que se obtendría en un espejo plano situado a la misma distancia $a = 24$ cm. Determinar el radio de curvatura R del espejo.

4.91. La distancia entre un objeto y su imagen real creada por un espejo esférico es $l_1 = 4$ cm. Una imagen exactamente igual del

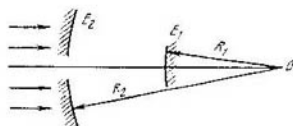


Fig. 4.32.

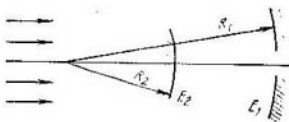


Fig. 4.33.

mismo objeto se obtiene por medio de una lente convergente de igual distancia focal que el espejo. La distancia entre el objeto y su imagen, en este caso, resulta ser igual a $l_2 = 10$ cm. Determinar el radio de curvatura del espejo.

4.92. Valiéndose de un sistema de espejos concéntricos, sobre una pantalla se obtiene la imagen del Sol (fig. 4.32). ¿Cuál debe ser la distancia focal de una lente delgada para poder obtener con ella una imagen del Sol del mismo tamaño que la anterior? Los radios de curvatura de los espejos son $R_1 = 12$ cm y $R_2 = 30$ cm.

4.93. Valiéndose de un sistema de espejos concéntricos se ha obtenido sobre una placa fotográfica una imagen de la Luna (fig. 4.33). ¿Cuál debe ser la distancia focal de una lente delgada para poder obtener con ella una imagen de la Luna del mismo tamaño que la anterior? Los radios de curvatura de los espejos son $R_1 = 4$ cm y $R_2 = 2,86$ cm.

4.94. En el fondo de un recipiente cilíndrico de diámetro $D = 5$ cm y altura $H = 50$ cm se encuentra un espejo esférico cóncavo con radio de curvatura $R = 80$ cm. El recipiente está lleno de agua hasta la mitad ($n = 1,33$). Hallar la posición del foco del sistema.

4.95. La superficie plana de una lente planocóncava de distancia focal f está recubierta de una capa buena reflectora. A la distancia a

de la lente, por el lado de la superficie cóncava, se encuentra una fuente puntual de luz. Determinar la posición de la imagen de la fuente. ¿Puede obtenerse en este sistema una imagen real?

4.96. La luz de una fuente puntual situada en el eje óptico, a la izquierda de una lente, más allá de su foco, después de pasar por la lente se refleja en un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura R y, después de pasar otra vez a través de la lente, da una imagen. ¿En qué puntos del eje óptico habría que colocar el espejo para que la imagen coincidiera con el objeto mismo? ¿Cómo se desplazará la imagen si el espejo se desplaza a lo largo del eje óptico entre estos puntos?

4.97. Detrás de una lente convergente delgada de distancia focal $f_1 = 15$ cm se encuentra un espejo esférico convexo de distancia focal $f_2 = 5$ cm. El sistema da una imagen directa (derecha) del objeto con aumento $\beta = 1$ independiente de su alejamiento de la lente. Determinar la distancia entre la lente y el espejo, si éste se halla entre la lente y su foco.

4.98. Detrás de una lente divergente de distancia focal $f_1 = 5$ cm, a la distancia $l = 7$ cm, está colocado un espejo esférico cóncavo. El sistema da una imagen del objeto con aumento $\beta = 1$ independiente de su alejamiento de la lente. Determinar la distancia focal del espejo.

4.99. Detrás de una lente convergente delgada está colocado a cierta distancia un espejo esférico cóncavo. El sistema da una imagen del objeto, que se encuentra a la distancia $a = 10$ cm delante de la lente, con aumento $\beta = 1$. El espejo se puede desplazar y obtener de nuevo una imagen del objeto con el mismo aumento, sin que el desplazamiento del espejo dependa de su radio de curvatura. En nuestro caso este desplazamiento es $l = 9$ cm. Determinar la distancia focal de la lente, si el espejo se encuentra durante todo el tiempo más allá del foco de ella.

4.100. A cierta distancia detrás de una lente divergente delgada de distancia focal $f = 10$ cm, se encuentra un espejo esférico cóncavo. El sistema da una imagen directa (derecha) del objeto con aumento $\beta = 1$. Después el espejo se aleja de la lente una distancia $l = 2$ cm y en estas condiciones se obtiene de nuevo una imagen del objeto con aumento $\beta = 1$. Determinar la distancia entre el objeto y la lente.

4.101. En contacto directo con un espejo esférico cóncavo se pone una lente convergente pequeña que tapa la parte central de la superficie reflectora del espejo. El sistema da dos imágenes reales para una misma posición del objeto delante del espejo: una imagen se obtiene a la distancia $b_1 = 50$ cm y la otra, a la distancia $b_2 = 10$ cm del espejo. Hallar la distancia focal de la lente.

4.102. El radio de curvatura de un espejo esférico cóncavo es $R = 60$ cm. ¿Qué distancia focal debe tener la lente delgada que hay que poner en contacto directo con el espejo para que el sistema de una imagen virtual derecha del objeto con el aumento $\beta = 1$?

4.103. Un espejo esférico de distancia focal f da una imagen invertida de un objeto que se encuentra de él a la distancia a . En contacto directo con el espejo se pone una lente delgada. Este sistema, sin que varíe la distancia hasta el objeto, da su imagen derecha con el mismo aumento. Hallar la distancia focal de la lente.

4.104. Un objeto plano se encuentra a la distancia $a = 60$ cm delante de un espejo esférico convexo con el cual está en contacto directo una lente convergente delgada de distancia focal $f = 20$ cm. El plano del objeto es perpendicular al eje óptico del sistema. Resulta que el plano del objeto coincide con el plano de la imagen formada después de pasar la luz a través de la lente, de reflejarse y pasar la segunda vez por la lente. Determinar el radio de curvatura del espejo convexo.

4.105. Un espejo esférico descansa sobre una superficie horizontal. En estas condiciones la imagen de una estrella en el cenit, creada por este espejo, se encuentra a la distancia a del mismo. El espejo se llena hasta los bordes de un líquido, después de lo cual la imagen de la estrella resulta encontrarse a la distancia $0,7 a$ del espejo. Determinar el índice de refracción del líquido. El diámetro del espejo es mucho menor que su radio de curvatura.

4.106. De un vidrio con índice de refracción $n = 1,5$ se ha hecho una lente de distancia focal $f = -10$ cm. Después una de las caras de la lente se ha cubierto con una capa delgada, semitransparente, de plata. Con esta lente se obtienen al mismo tiempo dos imágenes iguales del objeto, siendo las dimensiones de éstas independientes del lado de la lente que se dirija al objeto. Determinar el radio de curvatura de las superficies de la lente. Resolver este mismo problema para $f = 5$ cm.

4.107. Una de las superficies de una lente delgada está plateada. A la distancia $a = 34$ cm de la lente se encuentra, en el eje de ésta, una fuente puntual de luz. La lente da un haz de rayos paralelos, independientemente de cual sea el lado de la misma dirigido hacia la fuente. Determinar la distancia focal de la lente (antes de ser plateada).

4.108. Una de las superficies de una lente delgada está plateada. A la distancia $a = 28$ cm de la lente se encuentra, en el eje de ésta, una fuente puntual de luz. Cuando el lado plateado de la lente está dirigido hacia el objeto, la distancia entre éste y su imagen virtual es igual a 56 cm. Cuando es el otro lado de la lente el que mira al objeto, aquélla da un haz de rayos paralelos. Determinar la distancia focal de la lente (antes de ser plateada).

4.109. En la fig. 4.34 se representa un sistema de dos espejos esféricos: el cóncavo E_1 (con radio de curvatura $R_1 = 20$ m) y el convexo E_2 (con radio de curvatura $R_2 = 10$ m), situados a la distancia $L = 5$ m uno de otro. Este sistema sirve para retener temporalmente un corto impulso luminoso que incide sobre el espejo E_1 , a la distancia $h = 20$ cm del eje óptico, en forma de rayo delgado paralelo a dicho eje. ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá este rayo a

través del orificio de diámetro $d = 2$ cm que hay en el centro del espejo convexo.

4.110. En un sistema óptico que sirve para retener temporalmente un corto impulso luminoso, se utiliza la reflexión múltiple de la luz en dos espejos esféricos cóncavos, E_1 (con radio de curvatura

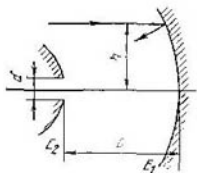


Fig. 4.34.

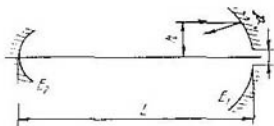


Fig. 4.35.

$R_1 = 10$ m) y E_2 (con radio de curvatura $R_2 = 1$ m), situados a la distancia $L = 5,5$ m uno de otro (fig. 4.35). En el centro del espejo E_1 hay un orificio de diámetro $d = 2$ mm. Sobre este espejo, a la altura $h = 15$ cm sobre el eje, incide un corto impulso luminoso en forma de rayo delgado paralelo a dicho eje. ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá este rayo a través del orificio?

Instrumentos ópticos

4.111. Una película de cine se proyecta en una sala de longitud $L = 20$ cm. La pantalla tiene las dimensiones $3,6 \times 4,8$ m². Determinar la distancia focal del objetivo del aparato proyector. Las dimensiones de los cuadros (fotogramas) sobre la película cinematográfica son 18×24 mm².

4.112. Un aparato de proyección, cuyo objetivo tiene la distancia focal f_1 , está colocado a la distancia L de la pantalla. ¿Cuántas veces variará la dimensión de la imagen si en el objetivo se pone una lente divergente adicional de distancia focal f_2 ?

4.113. En un aparato de proyección se utiliza un objetivo compuesto por dos lentes convergentes ($f_1 = 20$ cm y $f_2 = 15$ cm) situadas a la distancia $a = 5$ cm una de otra. ¿Con qué aumento se proyectará una diapositiva sobre la pantalla, situada a la distancia $L = 10$ m del objetivo del proyector? Hacia la diapositiva está dirigida la lente de distancia focal f_2 .

4.114. El telescopio de un observatorio astrofísico tiene la distancia focal $f = 300$ m. ¿Qué ángulo de balanceo máximo, debido a las sacudidas de los cimientos del observatorio, puede tolerarse para aprovechar plenamente el poder resolutivo de la película en que se fotografían los objetos astronómicos? La película se encuentra en el plano focal del espejo del telescopio. Su poder resolutivo, de-

pendiente de la estructura granular de la emulsión fotográfica, es $d = 20 \text{ } \mu\text{m}$.

4.115. Determinar la distancia focal principal y el poder óptico de unos lentes correctores de la hipermetropía de unos ojos, para los cuales la distancia de visión óptima es $d_1 = 50 \text{ cm}$.

4.116. Un miope puede leer letras pequeñas a una distancia no mayor que $d_1 = 20 \text{ cm}$ del ojo. ¿A qué son iguales el poder óptico y la distancia focal de los lentes correctores de la miopía de estos ojos?

4.117. Los límites de la acomodación de un miope se encuentran entre $d_1 = 10$ y $d_2 = 25 \text{ cm}$. ¿Cómo variarán estos límites si dicho miope se pone unos lentes cuyo poder óptico sea $D = -4$ dioptrías?

4.118. Un miope sin lentes observa un objeto que se halla a cierta distancia bajo la superficie del agua. Cuando pone el ojo cerca de la superficie del agua, la máxima hondura del objeto a la cual el miope puede distinguir aún sus detalles pequeños es $d = 30 \text{ cm}$. ¿Qué lentes debe ponerse este miope? El índice de refracción del agua es $n = 1.3$.

4.119. Para ver su propia cara, a un individuo le resulta cómodo colocar el espejo plano a la distancia $l = 25 \text{ cm}$ de ella. ¿Qué lentes le recomendaría a este individuo para leer un texto?

4.120. Un individuo, para leer un texto, se pone unos lentes cuyo poder óptico $D = -4$ dioptrías. ¿A qué distancia l le resultará cómodo colocar un espejo plano para ver su propia cara sin ponerse los lentes?

4.121. Una cámara fotográfica está enfocada al infinito. ¿A qué distancia se obtendrán imágenes suficientemente nítidas de los objetos? Considerar nítida la imagen si la borrosidad no es mayor que $d = 0.1 \text{ mm}$. La distancia focal del objetivo es $f = 50 \text{ mm}$ y la razón del diámetro del objetivo a su distancia focal es igual a $1/2$.

4.122. Un corredor pedestre fue fotografiado desde la distancia $a = 10 \text{ m}$ con una cámara fotográfica provista de objetivo cuya distancia focal es $f = 50 \text{ mm}$. La borrosidad de los detalles de la imagen sobre la película resultó ser igual a $d = 1 \text{ mm}$. El tiempo de exposición fue $\tau = 1/50 \text{ s}$. Determinar la velocidad del corredor.

4.123. ¿Cuánto tiempo puede estar abierto el obturador de una cámara fotográfica cuando se fotografía el salto de un nadador desde la torre de saltos al agua? Se fotografía el instante de hundirse en el agua. La altura de la torre de saltos es $H = 5 \text{ m}$. El fotógrafo se encuentra en una barca a la distancia $a = 10 \text{ m}$ del lugar de la inmersión del nadador. El objetivo del aparato tiene la distancia focal $f = 10 \text{ cm}$. La borrosidad tolerable de la imagen en el negativo es $d = 0.5 \text{ mm}$.

4.124. Para la fotografía aérea se utiliza una cámara cuyo objetivo tiene la distancia focal $f = 8 \text{ cm}$. La dimensión mínima de los detalles de las imágenes sobre la película fotográfica (poder resolutivo de la película) es $d = 10 \text{ } \mu\text{m}$. ¿A qué altura debe volar el avión para que en las fotografías puedan distinguirse las hojas de los árboles, cuya dimensión sea $l = 5 \text{ cm}$? ¿A qué velocidad del avión resultarán

distinguibles las imágenes si el tiempo de exposición es $\tau = 10^{-3}$ s?

4.125. En un satélite artificial que se mueve por una órbita circular a la altura $H = 100$ km, va montada una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene la distancia focal $f = 10$ cm. Se fotografía la superficie de la Tierra que hay debajo del satélite. El poder resolutivo de la película, determinado por la estructura granular de la emulsión fotográfica, es $d = 10$ μ m. ¿Qué tamaño mínimo pueden tener los objetos fotografiables? ¿Qué tiempo de exposición τ debe elegirse para que el movimiento orbital del satélite no influya en la calidad de la fotografía?

4.126. Para la fotografía aérea de una comarca se utilizó una cámara fotográfica cuyo objetivo estaba formado por una lente convergente ($f_1 = 10$ cm) y otra divergente ($f_2 = -15$ cm) situadas a la distancia $a = 5$ cm una de otra. ¿Qué extensión de la comarca puede fotografiarse con este objetivo desde la altura $H = 750$ m, sobre una película cuyos fotogramas son de $2,4 \times 3,6$ cm²? Hacia la película está vuelta la lente divergente.

4.127. El texto de un periódico se fotografía dos veces con una cámara «Zenit», cuyo objetivo tiene la distancia focal $f = 50$ mm: a) desde la distancia mínima permisible para este objetivo, $a = 0,5$ m, y b) interponiendo entre el objetivo y la cámara un anillo alargador de altura $h = 25$ mm (también desde la distancia mínima posible en este caso). Hallar la relación entre las dimensiones de las imágenes obtenidas en la película en ambos casos.

4.128. Al fotografiar una fuente puntual lejana, sobre la película, a causa de la baja calidad del objetivo y del material fotográfico empleado, se obtiene un circulito brillante de diámetro $d = 0,1$ mm. ¿Desde qué distancia máxima se pueden fotografiar, en estas mismas condiciones, dos fuentes puntuales situadas a la distancia $l = 1$ cm una de otra, para que en la fotografía no se superpongan aún sus imágenes? La distancia focal del objetivo es $f = 5$ cm.

4.129. Sobre una película fotográfica, después de revelada, en virtud de su poder resolutivo se obtienen suficientemente nítidos no sólo aquellos objetos a los cuales se enfoca el objetivo de la cámara (que se encuentran a la distancia a_0), sino también los que se hallan algo más cerca y algo más lejos de dicha distancia, es decir, se obtienen imágenes nítidas de los objetos que se encuentran dentro de cierta zona $a_1 - a_2$ ($a_1 < a_0 < a_2$; siendo a_1 el límite próximo de la profundidad de campo y a_2 , el límite lejano). Al fotografiar cierto objeto se obtuvieron nítidas las imágenes de los objetos que se encontraban de la cámara a distancias desde $a_1 = 7,5$ hasta $a_2 = 15$ m. ¿A qué distancia se hallaba el objeto fotografiado?

4.130. Debido a que el poder resolutivo de la película fotográfica es finito, en la fotografía se obtienen nítidas las imágenes de los objetos que se encuentran del aparato a las distancias desde $a_1 = 15$ m hasta $a_2 = 30$ m. Sin cambiar el enfoque de la cámara, se diafragma el objetivo (es decir, se disminuye el diámetro de la parte abierta de la lente del objetivo). Con esto el límite próximo de pro-



Fig. 4.36.

fundidad de campo se hace igual a $a_1 = 10$ m. Hallar el límite lejano de dicha profundidad.

4.131. Utilizando la fotografía hecha para el cartel anunciador que reproduce la fig. 4.36, determinar: a) la distancia focal del objetivo de la cámara fotográfica; b) a qué distancia a de las palmas de las manos se encontraba el objetivo al hacer la fotografía; c) el tamaño del pez pescado por el pescador; y d) el diámetro del objetivo. La borrosidad de los detalles de la imagen en la fotografía no es mayor que $d = 0,2$ mm. Suponer que el objetivo de la cámara es una lente delgada. La copia de la fotografía está hecha por contacto con el negativo, es decir, sin ampliación.

4.132. En un microscopio la distancia focal del objetivo es $f_1 = 5,4$ mm y la del ocular, $f_2 = 2$ cm. El objeto se encuentra del objetivo a la distancia $a_1 = 5,6$ mm. Determinar el aumento del microscopio para un ojo normal y la longitud del microscopio (distancia entre el objetivo y el ocular). El ojo está acomodado a la distancia de visión óptima $d = 25$ cm.

4.133. El objetivo de un anteojo tiene la distancia focal $f_1 = 30$ cm y el ocular, $f_2 = 4$ cm. El anteojo está enfocado al infinito*). ¿En qué sitio hay que colocar el diafragma para que el campo visual esté nítidamente limitado? ¿Cuál será el ángulo de campo vi-

*) En este problema y en una serie de los siguientes no se dan indicaciones acerca de la acomodación del ojo del observador. En estos casos se recomienda resolver el problema suponiendo que el ojo está acomodado al infinito (véase la observación a la solución de este problema).

sual si el diámetro del diafragma es $D = 12$ mm? ¿Cuál es el aumento angular del anteojo?

4.134. Un anteojo cuyo objetivo tiene la distancia focal $f = 50$ cm está enfocado al infinito. ¿A qué distancia hay que poner el ocular del anteojo para ver claramente los objetos que se encuentran a la distancia $a = 50$ m?

4.135. Ante el objetivo de un anteojo de Kepler (con una lente convergente como ocular) se encuentra un objeto a la distancia $a < f_1$. La relación entre las distancias focales de objetivo y del ocular es $f_1/f_2 = 10$. El anteojo está enfocado al infinito. Hallar el aumento lineal β del anteojo. Determinar el carácter de la imagen.

4.136. Ante el objetivo de un anteojo de Galileo (con una lente divergente como ocular) se encuentra un objeto a la distancia $a > f_1$. La relación entre las distancias focales del objetivo y del ocular es $f_1/f_2 = -10$. El anteojo está enfocado al infinito. Hallar el aumento lineal β del anteojo. Determinar el carácter de la imagen.

4.137. Un observador mira un objeto lejano valiéndose de un anteojo de Kepler. Como objetivo y ocular de dicho anteojo se utilizan lentes cuyas distancias focales respectivas son $f_1 = 30$ cm y $f_2 = 5$ cm. El observador ve la imagen nítida del objeto si la distancia entre el objetivo y el ocular del anteojo se encuentra entre los límites de $L_1 = 33$ cm a $L_2 = 34,5$ cm. ¿A qué distancias verá el observador nítidamente el objeto a simple vista?

4.138. Un individuo con vista normal observa un objeto lejano valiéndose de un anteojo de Galileo. Como objetivo y ocular se utilizan respectivamente unas lentes cuyas distancias focales son $f_1 = 40$ cm y $f_2 = -2$ cm. ¿Con qué distancia entre el objetivo y el ocular verá el observador la imagen nítida del objeto si el ojo puede acomodarse desde 10 cm hasta el infinito?

4.139. El objetivo y el ocular de un anteojo de Galileo tienen las distancias focales respectivas $f_1 = 57$ cm y $f_2 = -4$ cm. El anteojo está enfocado al Sol. A la distancia $b = 12$ cm del ocular está colocada una pantalla blanca. ¿Con qué distancia L entre el objetivo y el ocular se obtiene sobre la pantalla una imagen nítida del Sol? ¿Cuál será el diámetro D de esta imagen si la dimensión angular del Sol $\alpha = 30'$? Resuelva este mismo problema cuando se utiliza un anteojo de Kepler cuyo objetivo y ocular tienen respectivamente las distancias focales $f_1 = 40$ cm y $f_2 = 3$ cm y la pantalla está situada a la distancia $b = 15$ cm del ocular.

4.140. De objetivo de unos gemelos de teatro sirve una lente convergente de distancia focal $f_1 = 8$ cm, y de ocular, una lente divergente de distancia focal $f_2 = -4$ cm. ¿A qué es igual la distancia entre el objetivo y el ocular si la imagen se observa con el ojo desde la distancia de visión óptima? ¿Cuánto hay que desplazar el ocular para que la imagen pueda observarse con el ojo acomodado al infinito?

4.141. Dos espectadores, uno miope y otro hipermetrope, miran, uno después de otro, la escena con los mismos gemelos de teatro.

¿Cuál de los dos tiene que alargar más los tubos de los gemelos si en ambos casos se observa la imagen desde la distancia de visión óptima? ¿Calcular la variación de la longitud de los anteojos de los gemelos al pasar de un espectador a otro, si la distancia focal del ocular (lente divergente) es $f_2 = -4$ cm y las distancias de visión óptima de los espectadores miope e hipermetrope son, respectivamente, $d_1 = 20$ cm y $d_2 = 50$ cm.

Fotometría

4.142. Determinar la intensidad de la luz que debe dar una lámpara del alumbrado de una calle para que la iluminación del suelo entre dos farolas sea $E = 0,2$ lx. Las lámparas están suspendidas a la altura $h = 10$ m y la distancia entre los postes es $l = 40$ m. Al hacer el cálculo téngase en cuenta la iluminación que producen dos farolas contiguas.

4.143. Una fuente puntual de luz está colocada a cierta distancia L de una pantalla y produce en el centro de ésta la iluminación $E = 1$ lx. ¿Cómo variará la iluminación si por el otro lado de la fuente, y a la misma distancia, se coloca un espejo plano reflector ideal? Los planos de la pantalla y del espejo son paralelos.

4.144. A la distancia $L = 1$ m de una pantalla se encuentra una lámpara mate. Por medio de una lente, y desplazándola, se obtiene dos veces una imagen nítida de la lámpara sobre la pantalla. La iluminación de la imagen en un caso es 9 veces mayor que en el otro. Determinar la distancia focal de la lente.

4.145. Por medio de una lente se obtiene sobre una pantalla la imagen de una fuente de luz extensa con el aumento lineal $\beta_1 = 2$. Después se desplaza la pantalla a otra posición y sobre ella se observa de nuevo, con la misma lente, la imagen de la fuente con el aumento lineal $\beta_2 = 5$. Determinar la razón de las iluminaciones en estos casos.

4.146. A la distancia $L = 1$ m de una pequeña pantalla se encuentra una fuente puntual de luz. En el centro del espacio entre la fuente y la pantalla se coloca una lente. Con esto la iluminación de la pantalla no varía. Determinar la distancia focal de la lente.

4.147. A la distancia $L = 5$ m de una pantalla se encuentra un disco luminoso de diámetro $d = 1$ cm. Entre esta fuente de luz y la pantalla se pone una lente convergente de diámetro $D = 2$ cm y con ella se obtiene sobre la pantalla la imagen del disco. En estas condiciones la iluminación de la imagen es igual que la iluminación de la lente. Determinar la distancia focal de la lente.

4.148. Una lente convergente de distancia focal $f_1 = 6$ cm se encuentra a la distancia $L = 4f_1 = 24$ cm de una pantalla (fig. 4.37). Sobre la lente, a lo largo de su eje óptico, incide un haz de luz paralelo. ¿Cuántas veces variará la iluminación en el centro de la pantalla si en el camino de los rayos se interpone otra lente convergente,

de distancia focal $f_2 = 12$ cm, de modo que la distancia entre las lentes sea igual a la suma de sus distancias focales?

4.149. Una lente divergente de distancia focal $f_1 = -10$ cm se encuentra a la distancia $L = 10$ cm de una pantalla. Sobre la lente, a lo largo de su eje, incide un haz luminoso paralelo. ¿Cuántas veces variará la iluminación en el centro de la pantalla si en el camino del haz se interpone una lente convergente de distancia focal $f_2 = 20$ cm, de modo que la distancia entre las lentes sea $L = 10$ cm?

4.150. Dos lentes convergentes de iguales distancias focales f están situadas a la distancia $f/2$ una de otra (fig. 4.38). Por medio de

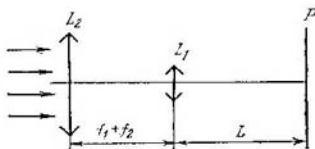


Fig. 4.37.

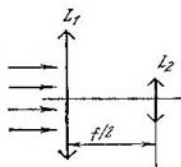


Fig. 4.38.

este sistema se obtienen dos imágenes del Sol: una formada por los rayos que después de refractarse en la lente L_1 pasan sin tocar la lente L_2 , y la otra formada por los

que pasan sucesivamente a través de ambas lentes. ¿Qué relación debe existir entre los diámetros de las lentes para que las iluminaciones de las imágenes sean iguales?

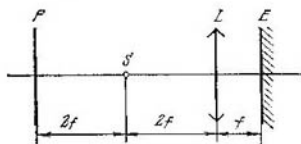


Fig. 4.39.

4.151. A la distancia $2f$ de una lente convergente L_1 , de distancia focal f , se halla un objeto luminoso S . La iluminación de la imagen nítida del objeto sobre la pantalla es en estas condiciones E_0 .

Entre la pantalla y la lente L_1 se coloca una lente divergente L_2 de distancia focal $-2f$. Para obtener la imagen nítida hubo que desplazar la pantalla una distancia igual a la distancia focal f de la lente. Determinar la iluminación de la imagen en el segundo caso.

4.152. Sobre un banco de óptica están colocadas sucesivamente una pantalla, una fuente puntual de luz S , una lente convergente y un espejo plano (fig. 4.39). ¿Cuántas veces variará la iluminación en el centro de la pantalla si el espejo plano se desplaza hacia la derecha una distancia igual a la distancia focal f de la lente?

4.153. Una lente convergente de diámetro $d = 2$ cm y distancia focal $f = 20$ cm, se ilumina con un ancho haz de luz paralelo.

Un espejo plano ideal está colocado detrás de la lente de modo que el 25% del flujo luminoso, después de pasar a través de la lente y de reflejarse en el espejo, incide de nuevo sobre la lente. Hallar la distancia entre la lente y el espejo.

4.154. Sobre una lente divergente de diámetro $d = 2$ cm y distancia focal $f = 20$ cm incide un ancho haz de luz paralelo. Detrás de la lente, a la distancia $l = 15$ cm, hay un espejo plano ideal. ¿Qué parte del flujo luminoso que pasa a través de la lente incidirá de nuevo sobre ella después de reflejarse en el espejo?

4.155. En el foco principal de un espejo cóncavo, cuyo radio de curvatura es $R = 2$ m, se encuentra una fuente puntual de luz. A la distancia $L = 10$ m de la fuente está colocada una pantalla perpendicular al eje óptico principal del espejo. ¿Cuántas veces mayor es la iluminación en el centro de la mancha brillante que se obtiene sobre la pantalla que la iluminación que en el mismo punto crearía la fuente en ausencia del espejo? Las pérdidas de luz en el aire y en la reflexión se desprecian.

4.156. ¿Con qué es más fácil prender fuego a un trozo de madera, con un espejo cóncavo de radio de curvatura $R = 10$ m y diámetro de la montura $D = 1$ m, o con una lente de diámetro $d = 2$ cm y distancia focal $f_1 = 4$ cm? De fuente de luz sirve el Sol.

4.157. ¿Es verosímil la leyenda de que los soldados griegos, por consejo de Arquímedes, incendiaron un navío de madera de los romanos, dirigiendo sobre él los rayos solares reflejados en escudos planos? ¿Cuántos soldados serían necesarios para esto? Se sabe que en un día despejado se consigue prender fuego a un trozo de madera seco, valiéndose de una lente de diámetro $d = 3$ cm y distancia focal $f = 0,1$ m. La dimensión angular del Sol es $\alpha = 0,01$ rad. El diámetro de un escudo $D = 1$ m y la distancia hasta el navío, $L = 20$ m.

4.158. A la distancia L de una pantalla pequeña se encuentra una fuente puntual de luz S . Entre la pantalla y la fuente de luz se coloca una lámina plano paralela de vidrio cuyo espesor es $L/3$ (la disposición se muestra en la fig. 4.40). Con esto la iluminación de la pantalla no varía. ¿Qué parte de la energía luminosa se pierde al pasar la lámina? El índice de refracción del vidrio es $n = 1,5$.

4.159. A la distancia L de una pantalla pequeña se encuentra una fuente puntual de luz. Entre la fuente y la pantalla se coloca una lente convergente de modo que la fuente se halla en el foco de la lente. Con esto la iluminación de la pantalla no varía. ¿Qué parte de la energía luminosa se pierde al pasar por la lente? La distancia focal de la lente es $f = 2L/3$.

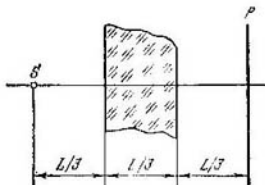


Fig. 4.40.

4.160. La energía de los rayos solares que inciden sobre la superficie de la Luna es parcialmente absorbida (el coeficiente de absorción es $\alpha = 90\%$) y parcialmente difusa. ¿Cuántas veces menor es la iluminación de la superficie de la Tierra durante el plenilunio que la iluminación que crean los rayos solares directos? El diámetro angular de la Luna visible desde la Tierra es $\varphi = 10^{-2}$ rad. Suponer que la superficie iluminada de la Luna dispersa la luz uniformemente en un ángulo sólido 2π .

4.161. La Luna en plenilunio crea sobre la Tierra la iluminación $E = 0,1$ lx (en la superficie perpendicular a los rayos). Para fotografiar el disco lunar con una película fotográfica de sensibilidad $H = 1$ lx·s, se colocó ésta en el plano focal del objetivo de un telescopio astronómico. Se obtuvo una fotografía de buena calidad con un tiempo de exposición $\tau = 0,1$ s. Determinar la luminosidad del objetivo (es decir, el cuadrado de la razón de su diámetro a la distancia focal). La dimensión angular de la Luna es $\alpha = 0,01$ rad.

4.162. Una cámara para fotografiar el Sol tiene un objetivo de distancia focal $f = 10$ m. Ante el objetivo se encuentra un diafragma circular de diámetro $D = 5$ cm. La película fotográfica que se utiliza tiene la sensibilidad $H = 10$ lx·s. ¿Cuál debe ser en estas condiciones el tiempo de exposición τ ? Se sabe que los rayos solares directos crean sobre la superficie perpendicular a ellos la iluminación $E = 4 \cdot 10^4$ lx. El diámetro angular del Sol es $\alpha = 0,01$ rad.

4.163. Con un anteojo consistente en un objetivo de diámetro $d_1 = 10$ cm y distancia focal $f_1 = 50$ cm y un ocular de diámetro $d_2 = 0,5$ cm y distancia focal $f_2 = 2,5$ cm se obtiene la imagen del Sol sobre una pantalla situada a la distancia $b = 20$ cm detrás del ocular. Cuántas veces es mayor la iluminación de esta imagen que la iluminación de la pantalla por los rayos solares directos? El diámetro angular del Sol es $\alpha = 0,01$ rad. Las pérdidas de luz en el sistema óptico se desprecian.

4.164. Se ha obtenido una imagen del Sol con un objetivo compuesto de una lente convergente y otra divergente ($f_1 = 10$ cm y $f_2 = -10$ cm) situadas a la distancia $l = 5$ cm una de otra. En el centro de la distancia entre las lentes se encuentra un diafragma circular de diámetro $D = 0,75$ cm. Las lentes tienen dimensiones suficientemente grandes y no limitan los haces luminosos. ¿Cuántas veces mayor es la iluminación de la imagen que la iluminación de la pantalla por los rayos solares directos? El diámetro angular del Sol es $\alpha = 0,01$ rad. Las pérdidas de luz en las lentes se desprecia.

4.165. De objetivo de un anteojo de Kepler sirve una lente de diámetro $D = 7,5$ cm y distancia focal $f_1 = 50$ cm. ¿Qué distancia focal tiene el ocular, si al observar con dicho anteojo la Luna parece cuatro veces menos brillante que cuando se mira a simple vista? El diámetro de la pupila es $d_p = 0,3$ cm.

4.166. ¿Cuántas veces variará la iluminación de la imagen de la Luna en la retina del ojo, observándola con un anteojo de Kepler, si el diámetro del objetivo se disminuye tres veces (diafragmándolo)?

El diámetro inicial del objetivo es $D = 15$ cm y su aumento, $\gamma = 25$. El diámetro de la pupila del ojo es $d_p = 0,3$ cm.

4.167. En el círculo de física de una escuela hicieron un anteojo de Kepler (fig. 4.41) cuyo aumento angular era $\gamma = 10$. El diámetro del objetivo, $D = 6$ cm. ¿Desde qué distancia máxima puede verse con este anteojo la luz de una cerilla encendida, si a simple vista esto se consigue desde la distancia $L = 1$ km? El diámetro de la pupila del ojo es $d = 0,3$ cm. Las pérdidas de luz se desprecian.

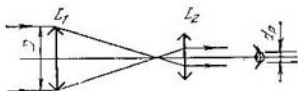


Fig. 4.41.

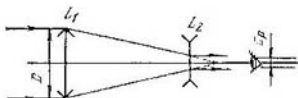


Fig. 4.42.

4.168. El diámetro del objetivo de un anteojo de Galileo es $D = 6$ cm (fig. 4.42). El aumento angular del anteojo, $\gamma = 60$. ¿Desde qué distancia máxima puede verse con este anteojo la luz de una cerilla encendida, si a simple vista esto se consigue desde la distancia $L = 1$ km? El diámetro de la pupila del ojo es $d_p = 0,3$ cm. Las pérdidas de luz se desprecian.

4.169. Un destello de corta duración en el aire produce en un observador que se encuentra a la distancia de 1 km el efecto de haber



Fig. 4.43.

sido próximo a la pérdida de la vista por cierto tiempo. En análogas condiciones atmosféricas un destello de radiación luminosa 100 veces más intensa produce el mismo efecto en un observador que se encuentra a 5 km de distancia. ¿Cómo debe ser el destello para que ocasione el mismo efecto en un observador situado a 9 km de distancia de él?

4.170. En un sistema de telecomunicación óptica el rayo transmisor tiene la forma de cono con ángulo en el vértice $\alpha = 10^{-4}$ rad (ángulo de divergencia del haz). En el aparato receptor la energía luminosa se enfoca, por medio de una lente de diámetro $D = 1$ m, sobre una célula fotoeléctrica (CFE) (fig. 4.43). Cuando la distancia L entre el transmisor y el receptor varía desde 5 hasta 10 km la señal a la salida de la célula fotoeléctrica, debido a la absorción de la luz por la atmósfera, disminuye dos veces. ¿Cuántas veces disminuirá la señal si la distancia L varía desde 10 hasta 20 km?

4.171. Una radiación infrarroja monocromática al propagarse en la atmósfera es absorbida por el vapor de agua, de manera que a la presión normal y la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ la energía de la radiación disminuye cinco veces en un recorrido horizontal de longitud $L = 4,35\text{ km}$. ¿Cómo es absorbida esta radiación al atravesar toda la atmósfera de la Tierra en dirección vertical? La masa molar media del aire (teniendo en cuenta el vapor de agua) es $\mu = 28,7\text{ g/mol}$. La razón de la tensión del vapor de agua a la presión total considérese constante en toda la altura de la atmósfera.

4.172. Se sabe que la radiación infrarroja de una longitud determinada la onda es absorbida intensamente por el metano (CH_4). En condiciones normales una capa de metano puro de espesor $d = 1\text{ cm}$ absorbe $\alpha = 98\%$ de la energía de la radiación. ¿Cuántas veces se debilita esta radiación al pasar a través de la atmósfera de la Tierra en dirección vertical? Al hacer el cálculo, el contenido relativo (en masa) de metano en la atmósfera tómese igual a $\beta = 1,4 \cdot 10^{-6}$.

4.173. Un haz dirigido de radiación infrarroja se debilita a causa de su dispersión en las gotitas de niebla. El radio de las gotitas es $r_1 = 5\text{ }\mu\text{m}$, la masa de agua en la unidad de volumen del aire es $\gamma_1 = 0,002\text{ g/m}^3$. ¿A qué distancia se debilitará el haz en esta niebla lo mismo que se debilita a la distancia $l_0 = 1\text{ km}$ en una niebla de gotitas de radio $r_0 = 20\text{ }\mu\text{m}$ para $\gamma_0 = 0,02\text{ g/m}^3$?

4.174. En una cortina de humo de partículas opacas de radio $r_1 = 5\text{ }\mu\text{m}$, cuando la masa de sustancia en la unidad de volumen de

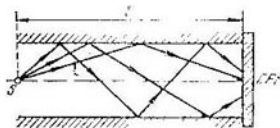


Fig. 4.44.

aire es $\gamma_1 = 0,04\text{ g/m}^3$, la distancia de visibilidad es $l_1 = 50\text{ m}$. ¿Cuánta sustancia por unidad de volumen de aire pulveriza la fuente de una cortina de partículas de radio $r_2 = 10\text{ }\mu\text{m}$, si la visibilidad se reduce hasta $l_2 = 20\text{ m}$?

4.175. Cuando la luz incide sobre una lámina de vidrio plano paralela el coeficiente de reflexión (relación entre las energías luminosas de los rayos reflejados y los incidentes) es igual a R . Expresar R por medio de los coeficientes de reflexión de la luz en los límites aire—vidrio y vidrio—aire, suponiendo que tienen el mismo valor, igual a ρ . Al resolver el problema téngase en cuenta la reflexión múltiple de la luz en la lámina plano paralela. La absorción de la luz por la placa despréciase. El ángulo de incidencia φ de los rayos sobre la lámina considérese pequeño.

4.176. En el eje de un tubo largo y estrecho de radio $r = 1\text{ cm}$, con paredes interiores reflectoras como un espejo, se encuentra una fuente puntual (fig. 4.44) cuya luz tiene la intensidad $I = 10\text{ cd}$. En el extremo del tubo, a la distancia $L = 1\text{ cm}$ de la fuente hay una célula fotoeléctrica. Los rayos de la fuente pueden llegar a la superficie fotosensible tanto sin reflejarse en las paredes del tubo

como después de reflejarse varias veces. Hallar el flujo luminoso que llega a la célula después de reflejarse tres veces en las paredes.

4.177. Un haz de luz paralelo, después de pasar a través de una lámina de vidrio plano paralela de espesor H , con índice de refracción n , se dirige mediante una lente sobre el cátodo de una célula fotoeléctrica. La distancia focal f de la lente es mucho mayor que su diámetro D . La disposición mutua de la lente y la célula es tal, que el cátodo, cuyo diámetro es d , tapa exactamente el flujo luminoso. En estas condiciones el galvanómetro que hay en el circuito de la célula indica la corriente I . ¿Qué corriente indicará el galvanómetro si se pone la lámina entre la lente y la célula fotoeléctrica sin cambiar la posición de las últimas?

4.178. Una bola negra pequeña, que absorbe todos los rayos luminosos, al ser iluminada por el Sol se calienta hasta la temperatura

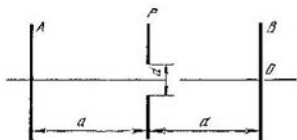


Fig. 4.45.

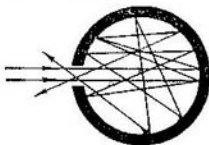


Fig. 4.46.

t_1 . ¿Hasta qué temperatura t_2 se calentará dicha bola si sobre ella se enfoca la imagen del Sol por medio de una lente de diámetro D y distancia focal f ? La energía que pierde la bola por unidad de tiempo a causa del intercambio calorífico es proporcional al área de su superficie y a la diferencia de temperatura entre la bola y el aire circundante. La temperatura del aire es t_0 . Considerar el caso en que el diámetro de la bola es menor que el de la imagen del Sol. El diámetro angular del Sol es igual a α .

4.179. Una pantalla está iluminada por los rayos solares directos. ¿Cómo variará la iluminación de la pantalla si entre ella y el Sol, a la distancia $l = 1$ m de la primera, se coloca una bola de vidrio de diámetro $d = 5$ cm que difunda uniformemente hacia todos los lados la luz que incide sobre ella?

4.180. A cierta distancia a , a la derecha de un plano A uniformemente luminoso, se encuentra una pantalla con un orificio redondo de diámetro d (fig. 4.45). A la misma distancia a , a la derecha de la pantalla, está colocado un vidrio mate B . Hallar la iluminación de la parte central del vidrio mate (en el punto O) si se sabe que el plano luminoso emite, por unidad de tiempo, de la unidad de superficie, en la unidad de ángulo sólido, el flujo luminoso Φ . Considérese que $d \ll a$.

4.181. Un fotorreceptor térmico consiste en una cámara hueca, cuya superficie interna tiene el área $S = 2$ cm², provista de un ori-

ficio pequeño de área $\sigma = 1 \text{ mm}^2$ (fig. 4.46). La superficie interna de la cámara absorbe una parte insignificante de luz (el coeficiente de absorción $\alpha = 0,01$) y la parte restante se difunde. En estas condiciones dentro de la cavidad se crea una radiación uniformemente distribuida en todas las direcciones. ¿Qué parte del flujo luminoso que llega al orificio de entrada de la cámara sale a través de él en sentido contrario?

4.182. Un flujo luminoso entra, a través de un orificio pequeño, en una cavidad cuya superficie interna tiene el área $S = 5 \text{ cm}^2$ (fig. 4.47). Las paredes de la cavidad absorben una pequeña parte de la luz y dispersan el resto. En estas condiciones dentro de la cavidad se crea una radiación uniformemente distribuida en todas las direcciones. Por un segundo orificio (las secciones de los orificios son $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 2 \text{ mm}^2$) sale una parte $n = 1/5$ del flujo luminoso que incide sobre el orificio de entrada. Determinar el coeficiente de absorción de las paredes de la cavidad.

Elementos de óptica ondulatoria

4.183. La fig. 4.48 representa el esquema del experimento de Fresnel para observar la interferencia. Dos espejos planos iguales forman entre sí el ángulo $\pi - 2\alpha$ ($2\alpha = 0,1 \text{ rad}$). Una fuente puntual de luz S se encuentra en la bisectriz del ángulo a la distancia

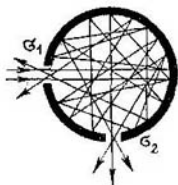


Fig. 4.47.

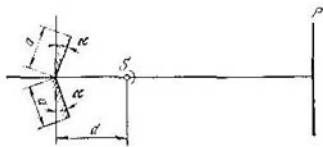


Fig. 4.48.

$d = 20 \text{ cm}$ de la línea de intersección de los espejos. ¿Qué dimensión mínima a deben tener los espejos para que en una pantalla lejana puedan observarse las franjas de interferencia? Sobre la pantalla no inciden rayos directos de la fuente.

4.184. Una lente convergente de diámetro $D = 5 \text{ cm}$ y distancia focal $f = 50 \text{ cm}$ se corta por su diámetro en dos mitades y éstas se separan una distancia $d = 5 \text{ mm}$ (fig. 4.49). Una fuente puntual de luz S se coloca a la distancia $a = 1 \text{ m}$ de la lente. ¿A qué distancia de la lente se podrá observar la figura de interferencia? La rendija entre las dos mitades de la lente está cerrada.

4.185. De una lente convergente de diámetro $D = 5 \text{ cm}$ y distancia focal $f = 50 \text{ cm}$ se corta una franja de anchura $d = 5 \text{ mm}$ y

las partes restantes de la lente se juntan (fig. 4.50). Una fuente puntual de luz S se coloca a la distancia $a = 75$ cm de la lente. ¿A qué distancia de la lente puede observarse la figura de interferencia?

4.186. En la fig. 4.51 se representa el esquema del experimento de Lloyd para observar la interferencia. Una fuente puntual de luz S se encuentra a la distancia $b = 20$ cm del borde izquierdo de un espejo plano AB y a la altura $a = 10$ cm sobre el plano del espejo. La

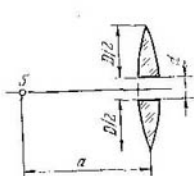
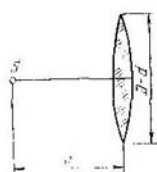


Fig. 4.49.



Fig. 4.50.



longitud del espejo es $d = 10$ cm. Determinar la dimensión vertical de la figura de interferencia sobre una pantalla situada a la distancia $L = 1$ m de la fuente.

4.187. Dos fuentes puntuales de luz monocromática S_1 y S_2 se encuentran a la distancia l una de otra. A la distancia $H = 8$ m de

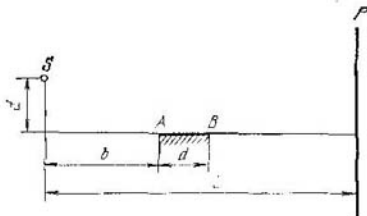


Fig. 4.51.

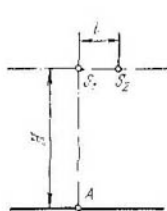


Fig. 4.52.

la fuente S_1 se observa la interferencia (fig. 4.52). La fuente S_2 se va alejando de la S_1 . El oscurecimiento en el punto A se observa por primera vez cuando la distancia entre las fuentes es $l_1 = 2$ mm. Por segunda vez se produce el oscurecimiento cuando la distancia es l_2 . Hallar esta distancia. Si $x \ll 1$ considerar $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.

4.188. De una fuente puntual monocromática S_1 se va apartando otra fuente puntual monocromática S_2 (la luz de ambas fuentes tiene la misma frecuencia) hasta que en el punto O de la pantalla, en la cual se observa la interferencia, se produce un oscurecimiento. En

estas condiciones la distancia entre las fuentes S_1 y S_2 es $l = 2 \text{ mm}$ (fig. 4.53). La distancia entre la fuente S_1 y la pantalla es $L = 9 \text{ m}$. ¿Cuánto hay que aproximar la pantalla a la fuente S_1 para que en el punto O se produzca de nuevo un oscurecimiento? Si $x \ll 1$ considérese $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.



Fig. 4.53

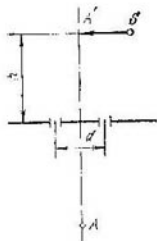


Fig. 4.54.

(fig. 4.54). Un receptor de luz A , que se encuentra en el eje del sistema, registra la intensidad de la luz, que varía periódicamente. Determinar la velocidad v con que se mueve la fuente, si la frecuencia de las oscilaciones de la intensidad es $f = 15 \text{ Hz}$; la longitud de onda de la luz, $\lambda = 600 \text{ nm}$; $d = 2 \text{ mm}$ y $h = 1 \text{ m}$. Durante las mediciones la fuente se mueve cerca del eje AA' del sistema.

4.190. Un receptor de señales de radio para observar la aparición de un satélite artificial de la Tierra detrás del horizonte, está situado en la orilla de un lago a la altura $H = 3 \text{ m}$ de la superficie del agua. A medida que el satélite se eleva sobre el horizonte se observan variaciones periódicas de la intensidad de la señal recibida. Determinar la frecuencia de la señal de radio del satélite si los máximos de intensidad se manifiestan cuando los ángulos de elevación del satélite sobre el horizonte son $\alpha_1 = 3^\circ$ y $\alpha_2 = 6^\circ$. La superficie del lago considérese como un espejo reflector ideal.

4.191. La radiación de una estrella que se halla en el plano del ecuador se recibe por medio de dos antenas situadas en el ecuador a la distancia $L = 200 \text{ m}$ una de otra. Las señales se envían desde las antenas al receptor por cables de igual longitud. Hallar la ley de las variaciones de la amplitud de la tensión en el circuito de entrada del receptor como resultado de la rotación de la Tierra. La recepción se hace por la longitud de onda $\lambda = 1 \text{ m}$. La estrella se desvía poco del cenit durante el tiempo que se observa.

4.192. Un transmisor de ondas cortas funciona con la frecuencia $f = 30$ MHz. El receptor se halla a la distancia $L = 2000$ km del transmisor. Las ondas hertzianas llegan al receptor reflejadas en las capas ionosféricas que se encuentran a las alturas $h_1 = 100$ km y $h_2 = 300$ km. Hallar la ley de las variaciones de la intensidad de la señal si el receptor se desplaza a lo largo de la recta que lo une con el transmisor. La traslación es pequeña en comparación con L .

4.193. La radiación por impulsos de un láser de rubí, con la longitud de onda $\lambda = 690$ nm, se dirige sobre la superficie de la Luna por medio de un telescopio cuyo espejo tiene el diámetro $D = 2,6$ m. En la Luna se ha instalado un receptor que funciona como espejo ideal de diámetro $d = 20$ cm, que refleja la luz exactamente en sentido contrario. La luz reflejada se capta con el mismo telescopio y se enfoca sobre un fotorreceptor.

a) ¿Con qué exactitud debe colocarse el eje óptico del telescopio en este experimento?

b) Omitiendo las pérdidas de luz en la atmósfera de la Tierra y en el telescopio, calcular qué fracción de la energía luminosa del láser será registrada en el fotorreceptor después de haberse reflejado en la Luna.

c) ¿Se puede apreciar a simple vista el impulso reflejado, si como sensibilidad umbral del ojo se toma $n = 100$ cuantos de luz y la energía radiada por el láser durante el impulso es $E = 1$ J?

d) Calcular la ventaja que reporta el empleo del reflector. Considérese que la superficie de la Luna dispersa $\alpha = 10\%$ de la luz que incide uniformemente en un ángulo sólido 2π . La distancia desde la Tierra a la Luna es $L = 380$ mil km. El diámetro de la pupila del ojo, $d_p = 0,5$ cm. La constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Elementos de óptica cuántica. Efecto fotoeléctrico *)

4.194. La potencia de una fuente de luz monocromática es $P_0 = 10$ W en la longitud de onda $\lambda = 500$ nm. ¿A qué distancia máxima será distinguida esta fuente por un hombre si su ojo reacciona a un flujo luminoso de 60 fotones por segundo? El diámetro de la pupila es $d_p = 0,5$ cm.

4.195. El rayo rojo de un láser que funciona con la longitud de onda $\lambda = 630$ nm tiene la forma de cono con ángulo en el vértice $\alpha = 10^{-4}$ rad (ángulo de divergencia del haz). La potencia óptica de la radiación es $P_0 = 3$ mW. ¿A qué distancia máxima L podrá un observador ver la luz del láser si su ojo reacciona con seguridad a $n = 100$ fotones por segundo. El diámetro de la pupila $d_p = 0,5$ cm. No tome en consideración la absorción de la luz.

*) En los problemas de este párrafo, si es necesario, considerar conocidas la constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s y la carga del electrón $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

4.196. Al ensayar una célula fotoeléctrica de vacío se observó que cuando el cátodo K se iluminaba con luz de frecuencia $\nu_0 = 10^{15}$ Hz, la corriente fotoeléctrica de la superficie del cátodo se interrumpía si la diferencia del potencial retardador entre el cátodo y el ánodo era $V_r = 2$ V (fig. 4.55). Determinar el trabajo de extracción del material del cátodo.

4.197. El cátodo de una célula fotoeléctrica se ilumina con luz monocromática de longitud de onda λ . Con un potencial negativo $V_1 = -1,6$ V en el ánodo, la corriente en el circuito se interrumpe. Si la longitud de onda de la luz varía 1,5 veces, para que cese la corriente hay que suministrarle al ánodo un potencial negativo $V_2 = -1,8$ V. Determinar el trabajo de extracción del material del cátodo.

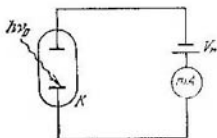


Fig. 4.55.

4.198. Para medir la constante de Planck, el cátodo de una célula fotoeléctrica de vacío se ilumina con luz monocromática. Cuando la longitud de onda de la radiación es $\lambda = 620$ nm, la corriente de fotoelectrones se interrumpe si en el circuito entre el cátodo y el

ánodo se conecta un potencial retardador V_r no menor que un valor determinado. Cuando se aumenta la longitud de onda en un 25%, el potencial retardador resulta ser 0,4 V menor. Determinar con estos dados la constante de Planck.

4.199. Si una célula fotoeléctrica de vacío se ilumina con luz amarilla ($\lambda_1 = 600$ nm) aquélla se carga hasta la diferencia de potencial $V_1 = 1,2$ V. ¿Hasta qué diferencia de potencial se cargará la célula si se ilumina con luz violeta ($\lambda_2 = 400$ nm)?

4.200. Un electrodo plano de aluminio se ilumina con luz ultravioleta de longitud de onda $\lambda = 83$ nm. ¿A qué distancia máxima l de la superficie del electrodo puede alejarse un fotoelectrón si fuera del electrodo existe un campo eléctrico retardador de tensión $E = 7,5$ V/cm? El umbral rojo del efecto fotoeléctrico para el aluminio corresponde a la longitud de onda $\lambda_0 = 332$ nm.

4.201. La radiación de un láser de argón con longitud de onda $\lambda = 500$ nm está enfocada sobre un cátodo fotoeléctrico plano en una mancha de diámetro $d = 0,1$ mm. El trabajo de extracción del fotocátodo es $A = 2$ eV. Al ánodo, que se halla a la distancia $l = 30$ mm del cátodo, se le suministra una tensión aceleradora $V = 4$ kV. Hallar el diámetro de la mancha de los fotoelectrones en el ánodo. El ánodo considérese plano y situado paralelamente a la superficie del cátodo.

4.202. Los rayos X (radiación de frenado) se producen al bombardear con electrones rápidos el anticátodo metálico del tubo de rayos X. Determinar la longitud de onda del límite de onda corta del espectro de la radiación de frenado si la velocidad de los electrones es igual al 40% de la velocidad de la luz en el vacío.

I. MECÁNICA

Cinemática

1.1. $t = 2$ s.

1.2. El tiempo t que se mueve el cuerpo a lo largo de la cuerda se determina partiendo de la relación $t^2 = 2L/a$, en la que a es la aceleración del cuerpo y L , la longitud de la cuerda. Si la cuerda forma con la vertical un ángulo α , entonces $a = g \cos \alpha$, y $L = D \cos \alpha$, siendo D el diámetro de la circunferencia. Por lo tanto, $t^2 = 2D/g$. El tiempo que dura el movimiento de los cuerpos a lo largo de cualquiera de las cuerdas será el mismo.

1.3. $n = (v/d) \sqrt{2H/g} = 90$.

1.4. Como no existe rozamiento, independientemente del camino, la velocidad de la bolita en el punto C será la misma. La dependencia de la velocidad respecto del tiempo se representa por rectas cuyas inclinaciones en las partes AB y DC y BC y AD de los canales son iguales. En la fig. 1.81 los caminos son iguales a las áreas de las superficies que hay debajo de las curvas Odc y Obc' . Como los caminos son iguales, las áreas deben ser también iguales, y ya por esto está claro que $t_{ABC} > t_{ADC}$.

Calculamos el tiempo de deslizamiento por ambos caminos:

$$t_{AD} = \sqrt{2h/g} \quad \text{y} \quad v_D = \sqrt{2gh}$$

Como $DC = h = v_D t_{DC} + (gt_{DC}^2/2) \sin \alpha$, resulta que

$$t_{DC} = -\frac{v_D}{g \sin \alpha} + \sqrt{\frac{v_D^2}{g^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2h}{g \sin \alpha}}$$

Por consiguiente,

$$t_{ADC} = t_{AD} + t_{DC} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin \alpha} (\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sin \alpha - 1).$$

Análogamente, para t_{ABC} :

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha}}, \quad v_B = \sqrt{2gh \sin \alpha}, \quad t_{BC} = -\frac{v_B}{g} + \sqrt{\frac{v_B^2}{g^2} + \frac{2h}{g}},$$

de donde

$$t_{ABC} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} + \sqrt{1 + \sin \alpha} \right).$$

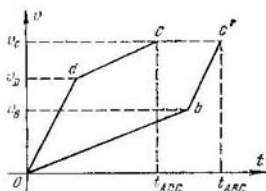


Fig. 1.81.

Ahora es fácil hallar la diferencia

$$t_{ABC} - t_{ADC} = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha}} (\sqrt{\sin \alpha + 1} - \sqrt{1 - \sin \alpha}) > 0,$$

ya que $\sqrt{\sin \alpha + 1} > \sqrt{1 - \sin \alpha}$.

1.5. $\sin \alpha = (v_1/v_2) \sin \beta$, $\alpha = 14,5^\circ$.

1.6. Se construye el vector velocidad de la lancha respecto de la canoa $v_0 = v_c - v_1$ (fig. 1.82). Por el punto B se hace pasar una recta paralela al vector v_0 y desde el punto A se baja una perpendicular a esta recta. La longitud de esta perpendicular AO es la distancia mínima entre la lancha y la canoa.

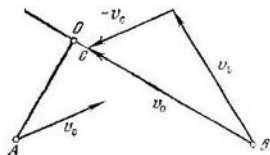


Fig. 1.82.

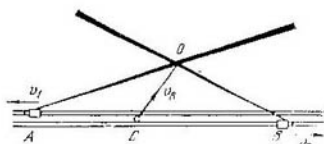


Fig. 1.83.

1.7. La distancia AB entre las locomotoras se divide en la relación 5 : 7 y de este modo se halla el punto C en que se encontraron (fig. 1.83). El punto de intersección de los rastros de humo fue arrastrado por el viento de C a O y, por consiguiente, la velocidad del viento v_0 está dirigida a lo largo de la recta CO .

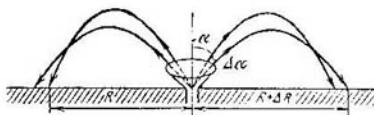


Fig. 1.84.

Midiendo en la fig. 1.83 las longitudes de los segmentos CO (l_1) y AB (l_2), se halla la velocidad del viento $v_0 = (v_1 + v_2) l_1/l_2 \approx 32 \text{ km/h} \approx 9 \text{ m/s}$.

1.8. $v = \sqrt{(l/t)^2 + (gt/2 - H/t)^2} = 5,25 \text{ m/s}$.

1.9. Supongamos que el chorro de agua sale con la velocidad v de un tubo que forma con el horizonte el ángulo α . En este caso el agua se elevará a la altura máxima $h = (v^2/2g) \sin^2 \alpha$, donde $v \sin \alpha$ es la componente vertical de la velocidad v . Designando por h_1 , h_2 y h_3 las alturas máximas de elevación correspondientes a los ángulos α iguales a 60° , 45° y 30° , se obtiene

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\sin 60^\circ)^2 : (\sin 45^\circ)^2 : (\sin 30^\circ)^2 = 3 : 2 : 1.$$

El tiempo t de vuelo del chorro de agua es igual al duplo del tiempo que tarda en elevarse a la altura h : $t = (2v/g) \sin \alpha$. En este tiempo el agua recorre en dirección horizontal el camino $L = vt \cos \alpha = (v^2/g) \sin 2\alpha$, de donde

$$L_1 : L_2 : L_3 = \sin 120^\circ : \sin 90^\circ : \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 : 1 : \sqrt{3}/2.$$

1.10. Los chorros de agua que salen de la boquilla bajo un ángulo α van a caer sobre tierra en distintos puntos de una circunferencia de radio R (fig. 1.84). De la solución del problema 1.9 se sigue que $R = (v^2/g) \sin 2\alpha$ (el hecho de que

el ángulo α sea con la vertical, y no con la horizontal, como en el problema 1.9, no desempeña papel alguno, ya que $|\operatorname{sen} 2\alpha| = |\operatorname{sen} 2(90^\circ - \alpha)|$. Los chorros que salen bajo el ángulo $\alpha + \Delta\alpha$ van a caer en una circunferencia de radio $R + \Delta R = (v^2/g) \operatorname{sen} 2(\alpha + \Delta\alpha)$. Si el incremento $\Delta\alpha$ del ángulo es pequeño, $\operatorname{sen} \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ y $\cos \Delta\alpha \approx 1$. Aplicando las fórmulas trigonométricas se halla que $\Delta R = (2v^2/g) \cos 2\alpha \cdot \Delta\alpha$.

El área del anillo que sobre la tierra riega el agua que sale de la boquilla formando ángulos desde α hasta $\alpha + \Delta\alpha$, es

$$\Delta S = 2\pi R \cdot \Delta R = (2\pi v^4/g^2) \operatorname{sen} 4\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

La masa de agua que cae sobre esta superficie en la unidad de tiempo es proporcional al área del anillo, que sobre la boquilla está comprendido entre los ángulos α y $\alpha + \Delta\alpha$, y al número de agujeros $\rho(\alpha)$ que corresponden a la unidad de superficie:

$$M \propto \rho(\alpha) \cdot 2\pi r_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot r_0 \cdot \Delta\alpha \propto \rho(\alpha) \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta\alpha,$$

donde r_0 es el radio de la superficie de la boquilla. De acuerdo con la condición del problema $M/\Delta S = \text{const}$ (condición de regado uniforme). El número de agu

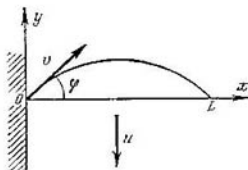


Fig. 1.85.

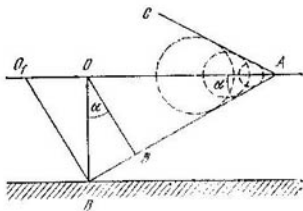


Fig. 1.86.

jeros correspondiente a la unidad de superficie de la boquilla debe depender para esto del ángulo α según la ley $\rho(\alpha) \propto \operatorname{sen} 4\alpha / \operatorname{sen} \alpha$.

1.11. La velocidad de la corriente del río a la distancia x de la orilla (fig. 1.85) es $u = u_L x/L$. Las componentes de la velocidad de la canoa respecto de la orilla a lo largo de los ejes x e y serán $v_x = v \cos \varphi$ y $v_y = v \sin \varphi - u$ (v es la velocidad de la canoa respecto del agua); y como $x = vt \cos \varphi$,

$$v_y = v \sin \varphi - \frac{u_L}{L} vt \cos \varphi$$

Por lo tanto, el movimiento de la canoa a lo largo del eje x es uniforme, y a lo largo del y , uniformemente retardado.

Al cabo del tiempo t después de su partida, la canoa tendrá las coordenadas x e y , siendo

$$x = vt \cos \varphi, \quad y = vt \sin \varphi - \frac{u_L}{L} \frac{vt^2 \cos \varphi}{2}.$$

En el instante en que la canoa se encuentra con la balsa $t = T$ y las coordenadas son $y = 0$ y $x = L$. Por consiguiente,

$$L = vT \cos \varphi, \quad \text{y} \quad 0 = vT \sin \varphi - \frac{u_L}{L} \frac{vT^2 \cos \varphi}{2},$$

de donde $\sin \varphi = u_L/2v$ y $T = L/(v \cos \varphi)$. Sustituyendo los valores dados se obtiene que $\varphi = 30^\circ$ y $T \approx 35$ s. Si $u_L \gg 2v$ es imposible que la canoa y la balsa se encuentren.

1.12. Desde cada punto por donde pasa el avión se propaga una onda sonora esférica (varias de estas ondas, en el instante en que el avión se halla en el punto A, se representan en la fig. 1.86). De límite de la zona a la cual llega el sonido sirve un cono, que es la envolvente de dichas ondas; AB y AC son las líneas de intersección del cono con el plano de la figura (este plano es perpendicular a la superficie de la Tierra). Hasta el punto B llega primero el sonido desde el punto O₁ ($BO_1 \perp AB$). OA es el camino recorrido por el avión desde el instante en que pasó sobre el observador hasta que éste oyó el sonido. OD es el camino recorrido durante este mismo tiempo por la onda sonora desde el punto O ($OD \perp AB$). Los ángulos BAO y BOD son iguales, por ser ángulos de lados mutuamente perpendiculares (designemos estos ángulos por α). Como puede verse en la fig. 1.86,

$$\cos \alpha = OD/OB = ct/H, \text{ y } \sin \alpha = OD/OA = ct/ut = c/v,$$

de donde la velocidad del avión es $v = cH/(H^2 - c^2t^2)^{1/2} = 583$ m/s.

1.13. $H = ct/(1 - c^2v^2)^{1/2} = 10$ km.

1.14. $t = \sqrt{3}/2\pi n = 0,41$ s.

1.15. $u = [v^2 + (v^2 + (2\pi nR)^2)^{1/2}]^{1/2} = 0,5$ m/s; $a = (2\pi n)^2 R = 0,8$ m/s².

1.16. La traslación de la sombra de la Luna por la superficie de la Tierra se debe al giro de esta última alrededor de su eje (Δl_1) y al desplazamiento de la Luna por su órbita (Δl_2). En el tiempo Δt estas traslaciones son

$$\Delta l_1 = (2\pi R_T/T_T)\Delta t, \quad \Delta l_2 = (2\pi r^2/T_L)\Delta t,$$

donde $T_T = 1$ día y $T_L = 28T_T$. Como la Luna se mueve por su órbita en el mismo sentido que gira la Tierra, la traslación resultante de la sombra será

$$\Delta l = \Delta l_2 - \Delta l_1 = 2\pi (r^2/T_L - R_T/T_T) \Delta t.$$

La velocidad de traslación de la sombra es

$$v = 2\pi (r^2/T_L - R_T/T_T) = 0,52 \text{ km/s}.$$

1.17. $v = \sqrt{\pi Rg}$.

Estática

1.18. $k \gg 1/\sin \alpha$.

1.19. Veamos las fuerzas que actúan sobre la escalera (fig. 1.87) y escribamos las condiciones de equilibrio:

$$F_T - N_1 = 0, \quad Mg \perp mg - N_2 = 0, \\ mg(l/2) \cos \alpha + Mg(l - a) \cos \alpha = N_1 \sin \alpha = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones hallamos

$$F_T = \left(\frac{m}{2} + \frac{2M}{3} \right) g \operatorname{ctg} \alpha = 275 \text{ N}, \quad N_2 = (M + m) g = 750 \text{ N}.$$

La escalera presiona sobre el suelo con la fuerza $F = (F_T^2 + N_2^2)^{1/2} = 800$ N. Esta fuerza forma con la vertical el ángulo $\beta = \arctg (F_T/N_2) \approx 20^\circ$.

1.20. La barra se mantendrá con estabilidad si cuando se producen pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio surge un momento de fuerzas que la restablece a dicha posición. Desviemos la barra de la vertical un ángulo pequeño α (fig. 1.88). La barra retornará a la posición vertical si el momento de la fuerza de tensión del hilo $T = Mg$ es mayor que el momento de la fuerza de la

gravedad de la barra mg :

$$MgH \sin \beta > mg(l/2) \sin \alpha.$$

La relación entre los ángulos α y β puede hallarse por el teorema de los senos: $\frac{\sin \beta}{l} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{H}$. Teniendo en cuenta que los ángulos α y β son pequeños y sustituyendo, aproximadamente, los senos de los ángulos por los ángulos mismos, se halla que $\beta = \alpha l / (H - l)$. Por lo tanto, el equilibrio será estable si $M > m(H - l)/2H$.

$$1.21. l_0 = (ml_1 + Ml_2)/(M + m).$$

$$1.22. \alpha = \varphi.$$

1.23. Consideremos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (fig. 1.89) y escribamos las condiciones de equilibrio para las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes x e y :

$$mg \sin \alpha - F_r - F \cos \alpha = 0, \quad N = mg \cos \alpha - F \sin \alpha = 0.$$

Como buscamos la fuerza F mínima, la fuerza de rozamiento deberá estar dirigida hacia arriba por el plano inclinado y tener el mayor valor posible: $F_r = kN$. Teniendo esto en cuenta, hallamos

$$F = mg(\operatorname{tg} \alpha - k)/(1 + k \operatorname{tg} \alpha) = 3.3 \text{ N}.$$

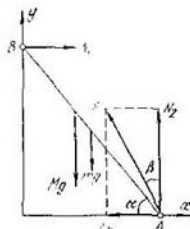


Fig. 1.87.

1.24. En este caso la fuerza de rozamiento está dirigida hacia abajo por el plano inclinado, de manera que

$$F = mg(\operatorname{tg} \alpha + k)/(1 - k \operatorname{tg} \alpha) = 21.4 \text{ N}.$$

1.25. Consideremos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (fig. 1.90). El cuerpo empezará a levantarse cuando la fuerza de reacción del apoyo N esté

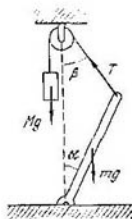


Fig. 1.88.

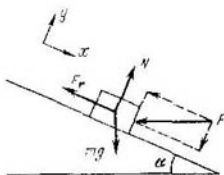


Fig. 1.89.

aplicada en el punto A. Escribamos las condiciones de equilibrio del cuerpo:

$$F \cos \alpha - F_r = 0, \quad N + F \sin \alpha - mg = 0,$$

$$F_r a/2 + N b/2 = F(b/2) \sin \alpha.$$

La última ecuación es la condición de igualdad a cero del momento de las fuerzas respecto del centro O del cuerpo. Por la condición el cuerpo debe moverse; de donde se sigue que $F_r = kN$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, se halla que $\operatorname{tg} \alpha = a/b + 1/k$.

$$1.26. F = \frac{mg}{2} \left(\frac{a}{b} \cos \alpha - \sin \alpha \right).$$

1.27. Consideremos las proyecciones sobre el plano inclinado de las fuerzas que actúan sobre el cubo (fig. 1.91). Como tenemos una condición límite de equi-

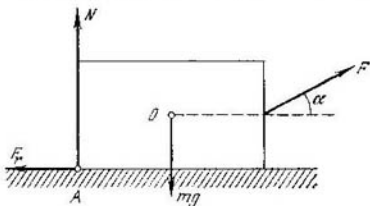


Fig. 1.90.

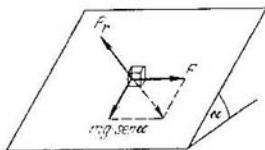


Fig. 1.91.

librio, la fuerza de rozamiento en reposo alcanza su valor máximo: $F_r = kN = kmg \cos \alpha$. Esta fuerza equilibra la resultante de las dos fuerzas perpendiculares entre sí: F y la proyección de la fuerza de gravedad $mg \sin \alpha$. Por consiguiente,

$$F_r^2 = F^2 + (mg \sin \alpha)^2,$$

de donde

$$F_{\min} = mg [(k \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha]^{1/2} = 0.47 \text{ N}.$$

1.28. El lápiz no rodará si $k \leq 1/\sqrt{3} = 0.58$.

1.29. Las ruedas traseras presionan más en la magnitud

$$\Delta N = 2Mg \sin \alpha \cdot H/L = 1.2 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

1.30. El centro de masas del camión se encuentra a la distancia $x = L/4$ de sus ruedas traseras. Calculando los momentos de fuerzas respecto del punto de contacto de la rueda trasera con la tierra, se obtiene la condición de vuelco del camión:

$$Th + MgH \sin \alpha \geq Mgx \cos \alpha,$$

donde la fuerza de tensión del cable $T = mg \sin \alpha$. La condición de vuelco se puede escribir también de la forma

$$(mgh + MgH) \sin \alpha \geq Mg(L/4) \cos \alpha.$$

de donde $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{ML/4}{mL + MH} = 0.4$, es decir, para $\alpha = 10^\circ$ no existe peligro real de vuelco.

1.31. La acción de las distintas fuerzas sobre el automóvil se aclara en la fig. 1.92, donde N_1 y N_2 son las fuerzas de reacción de los apoyos, y F_r , la fuerza de rozamiento. Para que el automóvil esté en equilibrio es necesario que la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto del centro de masas sea nula, es decir,

$$N_2 d/2 = N_1 d/2 + F_r h.$$

Como la fuerza de rozamiento sólo actúa sobre la rueda trasera, $F_r = kN_2$. Además, es evidente que $N_1 + N_2 - mg = 0$. Eliminando de estas ecuaciones las magnitudes N_1 y F_r , se obtiene $N_2 = \frac{mg}{2} \frac{d + 2kh}{d + kh}$. Si $k = 0$, como era de esperar, $N_{20} = mg/2$. Si k es muy grande, en la última ecuación puede despreciarse d

en comparación con kh . Entonces se obtiene que $N_2 = mg$. La variación de la fuerza de la presión de las ruedas delanteras al frenar es

$$\Delta N = N_2 - N_{20} = \frac{mg}{2} \frac{kh}{d + kh} = 480 \text{ N.}$$

1.32. $a = (k + \operatorname{tg} \alpha)g / (1 - k \operatorname{tg} \alpha)$, debiendo ser $k \operatorname{tg} \alpha < 1$.

1.33. Supongamos que en la placa se ha recortado un segundo agujero simétrico al primero (fig. 1.93). Entonces el centro de masas de la parte restante de la placa estará situado en su centro geométrico, es decir, en el punto O . El

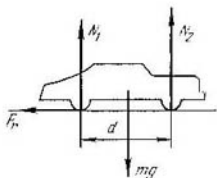


Fig. 1.92.

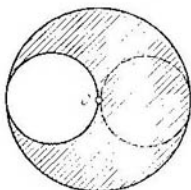


Fig. 1.93.

centro de masas de la parte de la placa abarcada por la línea de trazos se encuentra a la distancia $R/2$ del punto O . Si M es la masa de la placa completa, y m , la masa de la parte cortada, la posición del centro de masas de la placa con el agujero se determina partiendo de la relación $(M - 2m)x = m(R/2 - x)$, donde x es la distancia desde el punto O al centro de masas buscado. Teniendo en cuenta que $m/M = 1/4$ (las masas están en la misma relación que las áreas de las partes correspondientes del disco), se obtiene $x = R/6$.

1.34. El carrito no girará si el momento de la fuerza de rozamiento respecto del centro de masas es igual al momento de la fuerza F , que hace que el carrito

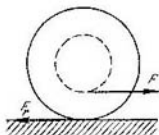


Fig. 1.94.

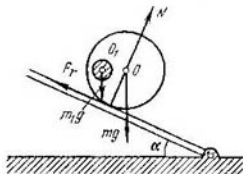


Fig. 1.95.

se mueva (fig. 1.94), es decir, si $RF_r = rF$. Es evidente que $F_r = mgk$ y $F = mgk + ma$, donde m es la masa del carrito. Haciendo estas sustituciones se obtiene que $k = ra/(R - r)g$.

1.35. a) El carrito no se mueve; b) el carrito se mueve hacia la derecha, es decir, hacia el lado del hilo que tira; c) el carrito se mueve hacia la izquierda, o sea, hacia el lado opuesto al del hilo que tira.

1.36. Cuando aumenta el ángulo α el cilindro puede deslizarse o rodar (fig. 1.95). El deslizamiento empieza cuando la componente de la fuerza de gravedad del cilindro a lo largo de la tabla se hace mayor que el valor máximo

de la fuerza de rozamiento. Si α_1 es el ángulo con el cual comienza el deslizamiento, m_1g , la fuerza de la gravedad excedente de la substancia que llena el orificio, y mg , la fuerza de gravedad del cilindro homogéneo, entonces

$$(m + m_1)g \sin \alpha_1 = k (m + m_1) g \cos \alpha_1,$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k = 0,3.$$

Determinemos ahora el ángulo α_2 , a partir del cual comienza el rodamiento puro (sin deslizamiento) del cilindro. Para esto nos fijamos en que, como no existe deslizamiento, la fuerza de rozamiento es menor que su valor máximo e igual a la componente de la fuerza de gravedad a lo largo de la tabla, es decir,

a la magnitud $(m + m_1) g \sin \alpha_2$. Es evidente que el cilindro puede mantenerse en la tabla mientras el momento de la fuerza de rozamiento respecto de su eje no supere el valor máximo posible del momento de la fuerza m_1g , que corresponde a la posición horizontal de la línea de los centros del orificio y del cilindro. Así, pues, para $\alpha = \alpha_2$ tendremos que

$$R (m + m_1) g \sin \alpha_2 = 2Rm_1g/3.$$

Como, fácil es verlo, $m_1 = 5m/8$, de esta igualdad resulta que $\sin \alpha_2 = 10/39$. Con esto $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,26 < \operatorname{tg} \alpha_1$. Por consiguiente, la igualdad de los momentos se infringe antes y el cilindro empieza a rodar sin deslizamiento. Conviene advertir que el eje respecto del cual se calculan los momentos puede elegirse arbitrariamente, pero en nuestro caso el cálculo resulta más fácil si este eje coincide con el del cilindro.

1.37. Los conos se mueven uno respecto de otro con deslizamiento, excepto en un punto, en el cual sus velocidades lineales coinciden. Designemos la coor-

denada de este punto, medida desde el vértice del segundo cono, por x_0 . En este punto la fuerza de rozamiento por deslizamiento, que actúa sobre el segundo cono, cambia de signo (fig. 1.96, a), ya que hasta él la velocidad del primer cono es mayor que la del segundo, y después de él, menor.

El segundo árbol no está cargado, por lo que el segundo cono girará con velocidad angular constante si el momento total de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre él es nulo. Como la fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de longitud del cono es constante, su momento aumenta linealmente desde el vértice del cono hacia su base (a costa del aumento del brazo de la fuerza). En el punto x_0 el momento, lo mismo que la fuerza, cambia de signo (fig. 1.96, b).

Sea H la altura del cono; R , el radio de la base, y r_0 , el radio en el punto x_0 . La igualdad a cero del momento total de las fuerzas de rozamiento significa que son iguales las áreas del triángulo y del trapecio rayadas en la fig. 1.96, b: $x_0 R r_0 / 2 = HFR/4$. De la semejanza de los triángulos OAB y OA_1B_1 obtenemos que $x_0/r_0 = H/R$. Resolviendo estas dos igualdades hallamos que $r_0 = R/\sqrt{2}$.

Las velocidades lineales de ambos conos en el punto x_0 son iguales: $\omega_1 (R - r_0) = \omega_2 r_0$. Sustituyendo en esta ecuación el valor de r_0 , determinamos el de ω_2 : $\omega_2 = \omega_1 (\sqrt{2} - 1) \approx 0,41\omega_1$.

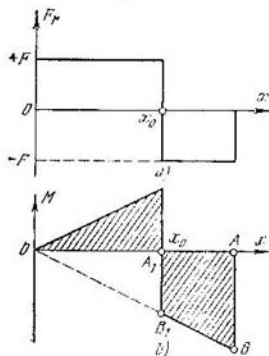


Fig. 1.96.

Dinámica

1.38. Comprobemos si la resistencia del hilo es suficiente para que los cuerpos puedan moverse por la acción de la fuerza F . Consideremos las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos en el primer caso (fig. 1.97, a). Si

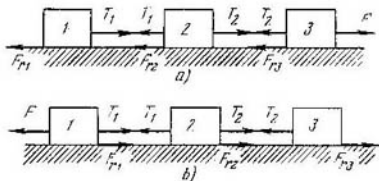


Fig. 1.97.

los cuerpos se mueven, sobre ellos actúan las fuerzas de rozamiento por deslizamiento y las fuerzas de tensión de los hilos. Con esto

$$\begin{aligned} T_1 &\geq k_1 Mg = 15 \text{ N}, \\ T_2 &\geq T_1 + k_2 Mg \geq 25 \text{ N} > F. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el hilo 2 se rompe antes de que los cuerpos empiecen a moverse. En el instante de la rotura la fuerza de tensión $T_2 = T = 20 \text{ N}$. Como el hilo 2 está tenso, la fuerza de rozamiento del cuerpo 3 alcanza su valor máximo: $F_{f3} = k_3 Mg = 5 \text{ N}$. El cuerpo 3 no se mueve; por consiguiente, $F = T_2 + k_3 Mg = 25 \text{ N}$. Si la fuerza F está aplicada al cuerpo 1 (fig. 1.97, b), el cuadro cambia mucho. Haciendo el mismo análisis que en el primer caso, nos cercioramos de que ahora, si la fuerza F aumenta, los cuerpos empiezan a moverse. Su aceleración $a = [F - (k_1 + k_2 + k_3) Mg] / 3M$. Con esto

$$T_2 = Ma + k_3 Mg \quad \text{y} \quad T_1 = T_2 + Ma + k_2 Mg.$$

Como $T_1 > T_2$, se rompe el hilo 1. En este instante la fuerza de tensión $T_1 = T = 20 \text{ N}$. Expresamos la fuerza F por medio de T_1 y de la fuerza de rozamiento:

$$F = (3/2) [T_1 - (k_2 + k_3) Mg] + (k_1 + k_2 + k_3) Mg = 37,5 \text{ N}.$$

1.39. La fuerza de tensión en el extremo superior de la cuerda es

$$T_s = \frac{m_2 + m}{m_1 + m_2 + m} F = 106 \text{ N};$$

en el centro de la cuerda

$$T_c = \frac{m_2 + mf/2}{m_1 + m_2 + m} F = 82,6 \text{ N}.$$

1.40. Como el rozamiento en el eje de la polea y la masa de ésta son insignificantes, la fuerza de tensión T a lo largo del hilo que une los cuerpos será constante. Por eso las ecuaciones del movimiento para los cuerpos m_1 y m_2 tendrán la forma (fig. 1.98)

$$m_1 a = m_1 g - T \quad \text{y} \quad m_2 a = T - m_2 g.$$

donde a es la aceleración de los cuerpos. La balanza de resorte se estira con la fuerza $2T$. De las ecuaciones del movimiento tenemos

$$2T = 4m_1m_2g/(m_1 + m_2) = 4,7 \text{ N}, \quad T = 2,35 \text{ N},$$

$$a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2) = 1,96 \text{ m/s}^2.$$

$$1.41. \quad a = \frac{(m_1 - m_2)g - F_r}{m_1 + m_2} \approx 1,6 \text{ m/s}^2,$$

$$T = m_1 \frac{2m_2g + F_r}{m_1 + m_2} = 4,2 \text{ N}.$$

1.42. La fuerza de tensión a lo largo de la cuerda es constante. Por eso las ecuaciones del movimiento de los cuerpos m_1 y m_2 tienen la forma $m_1a_1 = m_1g - T$ y $m_2a_2 = 2T - m_2g$. Se ve fácilmente que $a_1 = 2a_2$ (¿por qué?). Teniendo esto en cuenta, se obtiene $a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + m_2/2}g$.

1.43. Como el cuerpo de masa M no se mueve, la fuerza de tensión de la cuerda es constante todo el tiempo e igual a la fuerza de gravedad del cuerpo M . Sobre el mono actúa la fuerza de gravedad (hacia abajo) y la fuerza de la tensión

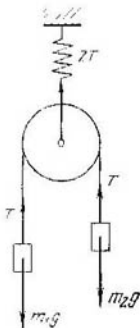


Fig. 1.98.

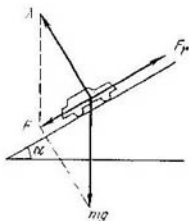


Fig. 1.99.

de la cuerda (hacia arriba). De aquí la aceleración del mono será $a = (M - m)g/m$ y el tiempo $t = (2l/a)^{1/2} = 4 \text{ s}$.

$$1.44. \quad F = (1/2)mg(k_2 - k_1)\cos\alpha = 0,63 \text{ N}.$$

$$1.45. \quad F_r = \frac{M}{M+m} F \cos\alpha - mg \sin\alpha.$$

$$1.46. \quad t = \left(\frac{2l}{a}\right)^{1/2} = \left(\frac{2h \cos\alpha}{g \sin\beta \sin(\beta - \alpha)}\right)^{1/2}.$$

1.47. Como se infiere de la fig. 1.99.

$$F_r = kmg \cos\alpha \quad \text{y} \quad F = mg \sin\alpha,$$

donde m es la masa del automóvil; F_r , la fuerza de rozamiento; y F , la fuerza resultante de la fuerza de gravedad mg y de la fuerza de reacción N . De aquí

$$ma = F_r - F \quad \text{o bien} \quad a = g(k \cos\alpha - \sin\alpha);$$

por consiguiente, $k = (a + g \sin\alpha)/g \cos\alpha \approx 0,65$.

1.48. Las ecuaciones del movimiento para los cuerpos inferior y superior tienen la forma (fig. 1.100)

$$Ma = F - T - F_r, \quad ma = T - F_r,$$

donde T es la fuerza de tensión de la cuerda. Tomando en consideración que $F_r = mgk$, obtenemos $F = a(M + m) + 2mgk = 24,5$ N.

1.49. Consideremos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y la plancha (fig. 1.101). Supongamos que el cuerpo se desliza hacia abajo por la plancha ($a_1 > a_2$). Entonces la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo está

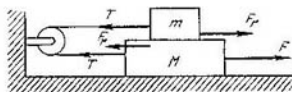


Fig. 1.100.

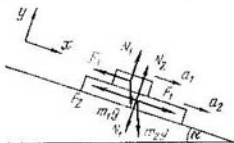


Fig. 1.101.

dirigida hacia arriba y es $F_1 = k_1 N_1$. Si la plancha se desliza por el plano inclinado, $F_2 = k_2 N_2$. Escribamos las ecuaciones del movimiento del cuerpo y de la plancha en las proyecciones sobre los ejes x e y :

$$m_1 g \sin \alpha - k_1 N_1 = m_1 a_1, \quad N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0,$$

$$m_2 g \sin \alpha + k_1 N_1 - k_2 N_2 = m_2 a_2, \quad N_2 - N_1 - m_2 g \cos \alpha = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones hallamos

$$a_1 = g (\sin \alpha - k_1 \cos \alpha) = 3,7 \text{ m/s}^2,$$

$$a_2 = g \left(\sin \alpha + k_1 \frac{m_1}{m_2} \cos \alpha - k_2 \frac{m_2 + m_1}{m_2} \cos \alpha \right) = 1,3 \text{ m/s}^2.$$

La solución ha dado que $a_1 > a_2$; por lo tanto, la suposición antes hecha era correcta. La plancha no se moverá si

$$k_2 \geq \frac{m_2 [\sin \alpha + k_1 (m_1/m_2) \cos \alpha]}{(m_1 + m_2) \cos \alpha} = 0,44.$$

1.50. Las ecuaciones del movimiento de las pesas tienen la forma

$$ma = mg - T, \quad ma = T - (F_r + F),$$

donde T es la fuerza de tensión de la cuerda; a , la aceleración de las pesas; $F_r = kmg \cos \alpha$, la fuerza de rozamiento, y la fuerza $F = mg \cos \alpha$. Sustituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones inicial y eliminando de ellas a , hallamos

$$2T = mg + F_r + F = mg (1 + k \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Sobre la polea actúan dos fuerzas de tensión T iguales, el ángulo entre ellas es $\pi/2 - \alpha$. La fuerza con que presiona la polea sobre el eje es $N = 2T \cos (\pi/4 - \alpha/2)$.

1.51. El hombre debe moverse hacia abajo con la aceleración

$$a = \frac{m+M}{M} g (\sin \alpha - k \cos \alpha) = 3,5 \text{ m/s}^2.$$

1.52. El hombre debe moverse hacia arriba con la aceleración

$$a = \frac{m+M}{M} g (k \cos \alpha - \sin \alpha) = 3 \text{ m/s}^2.$$

1.53. Como no existe rozamiento, sobre el cilindro no actúan fuerzas tangentes a su superficie. Por eso, cuando la aceleración de la tabla aumenta, el cilindro subirá el escalón sin girar. Escribamos la segunda ley de Newton para las direcciones horizontal y vertical, suponiendo que el cilindro está en reposo respecto de la tabla (fig. 1.102):

$$ma = N_1 \cos \alpha, \quad 0 = mg - N_1 \sin \alpha - N,$$

donde $\sin \alpha = (R - H)/R$. Teniendo en cuenta que, para la aceleración máxima posible $a_{\max}$ la fuerza de reacción $N = 0$, se obtiene que $a_{\max} = g \{ [11(2R - H)]^{1/2} / (R - H) \}$.

1.54. El mercurio se mueve con la aceleración a ; por consiguiente, sobre él actúa una fuerza horizontal. Sobre las columnas DB y EC la fuerza actúa por

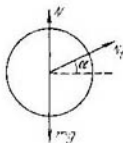


Fig. 1.102.

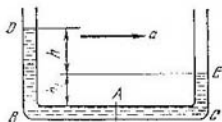


Fig. 1.103.

parte de las paredes del tubo (fig. 1.103). En el trozo horizontal BC sobre el mercurio actuará una fuerza a expensas de la diferencia de presión $P_B - P_C$ en las secciones B y C :

$$\rho \cdot 2LSa = \rho ghS, \quad h = 2La/g.$$

El mercurio empieza a derramarse si $h > H$, es decir, $a > gH/2L$. La presión en la sección A es

$$P_A = \frac{P_B + P_C}{2} = \frac{1}{2} [P_0 + \rho g(h + h_1) + P_0 + \rho gh_1];$$

pero $h + 2h_1 = H$, por lo tanto, $P_A = P_0 + \rho gH/2$.

1.55. $t = v/kg = 10$ s.

1.56. Sobre el pasajero, durante la carrera de despegue, actúa la fuerza de gravedad mg y la reacción de apoyo por parte del asiento N . La suma vectorial de estas fuerzas comunica al pasajero la aceleración horizontal $a = v^2/2L$. La sobrecarga es

$$n = N/mg = [1 + (v^2/2Lg)^2]^{1/2} = 1,01.$$

1.57. $t = (2m\omega/k)^{1/2} = 10$ s, donde k es la tangente del ángulo de inclinación de la gráfica dada en la fig. 1.34.

1.58. Teniendo en cuenta que el impulso de la fuerza es igual al área de la superficie que hay debajo de la gráfica dada en la fig. 1.35, se obtiene que $v = F_{\max} t_0/2m = 28$ m/s.

1.59. El esquíador toma impulso por la acción que ejercen sobre él la proyección de la fuerza de gravedad sobre la dirección de la pendiente, la fuerza de rozamiento y la fuerza de resistencia del aire. La velocidad adquiere su valor máximo cuando la suma de estas fuerzas se anula:

$$mg \sin \varphi = kmg \cos \varphi + \alpha v^2,$$

de donde hallamos

$$v = [mg (\sin \varphi - k \cos \varphi) / \alpha]^{1/2} = 100 \text{ km/h}$$

1.60. $v_2 = v_1 (m_2/m_1)^{1/2} = 3,5$ m/s.

1.61. Sobre la bolita de la izquierda actúan la fuerza de gravedad mg y la fuerza de tensión T del hilo. Sobre la bolita de la derecha actúan, además, la fuerza de Arquímedes $\rho_1 Vg$ y la fuerza de resistencia del líquido kv (donde v es el volumen de la bolita; k , una magnitud constante, y v , la velocidad de la bolita). Durante la caída libre en el líquido, la bolita tiene la velocidad estacionaria v_0 ; por consiguiente,

$$kv_0 + \rho_1 Vg = \rho Vg, \quad k = (\rho - \rho_1) Vg/v_0.$$

Durante el movimiento estacionario las sumas de las fuerzas que actúan sobre las bolitas izquierda y derecha serán iguales a cero:

$$\rho Vg = T, \quad T + \rho_1 Vg = \rho Vg + (\rho - \rho_1) Vg/v_0,$$

de donde $v = v_0 \rho_1 / (\rho - \rho_1)$.

1.62. Supongamos que el coeficiente de rozamiento de las ruedas con los raíles es k . Entonces sobre la parte desenganchada del tren actúa la fuerza $kMg/3$; la aceleración a_1 de esta parte se determina partiendo de la ecuación

$$Ma_1/3 = kMg/3, \quad a_1 = kg.$$

Por consiguiente, su velocidad varía de acuerdo con la ley $v = v_0 - kgt$. El tiempo durante el cual la velocidad se reduce a la mitad es $t_1 = v_0/2kg$. Sobre la parte restante del tren actúan dos fuerzas: la fuerza de tracción y la fuerza de rozamiento. Hasta el corte del tren, la fuerza de tracción F_1 equilibraba la fuerza de rozamiento: $F_1 = kMg$. Después del corte es fácil hallar la aceleración a_2 de la parte restante: $2Ma_2/3 = F_1 - F_r = kMg - 2kMg/3$, $a_2 = kg/2$. La velocidad de esta parte es $v_2 = v_0 - kgt/2$ y en el instante t_1 ,

$$v_2 = v_0 + \frac{kg}{2} \frac{v_0}{2kg} = \frac{5}{4} v_0,$$

1.63. Después que la cuerda se atiranta, la pesa sigue moviéndose hacia abajo durante cierto tiempo, pero la aceleración a de la pesa está dirigida hacia arriba y es $a = (T - mg)/M$. Para, moviéndose con esta aceleración, anular la velocidad $v = \sqrt{2gh}$, la pesa debe recorrer el camino $l = v^2/2a = Mgh/(T - Mg) = 15$ m.

1.64. La distancia $H - h$ la recorre el sistema en el tiempo t_1 , que se halla de la ecuación $H - h = at_1^2/2$, en la que la aceleración de las pesas $a = mg/(2M + m)$. En el instante t_1 las pesas tienen la velocidad $v = at_1$. Después que la sobrecarga se queda enganchada en el soporte, las pesas recorren el camino h , durante el tiempo t_2 , moviéndose uniformemente con la velocidad v , con esto $t_2 = h/v$. El tiempo total de movimiento es

$$t = t_1 + t_2 = \left[\frac{2(H-h)(2M+m)}{mg} \right]^{1/2} + h \left[\frac{2M+m}{2mg(H-h)} \right]^{1/2} = 3,1 \text{ s.}$$

$$1.65. \quad t = \frac{m}{F} \left(\frac{gL}{\sin 2\alpha} \right)^{1/2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

1.66. La diferencia vectorial entre los impulsos final e inicial de la primera partícula es igual al impulso I de la fuerza que actúa (fig. 1.104, a). Su módulo $I = mv\sqrt{2}$. Un impulso I igual, de la fuerza, actúa sobre la segunda partícula. El impulso final de ésta $2mv_2$ es igual a la suma vectorial de su impulso inicial mv y el impulso I de la fuerza (fig. 1.104, b). Aplicando el teorema de los cosenos se puede hallar la velocidad final v_2 de la segunda partícula: $v_2 = \sqrt{5}v/2$.

$$1.67. \quad v_2 = 5v/2.$$

1.68. La masa de agua que en la unidad de tiempo toma y lanza hacia atrás la lancha es $m_t = \rho Su$. Cuando el agua entra en la lancha adquiere la velocidad de ésta v y sobre la lancha (por la tercera ley de Newton) actúa la fuerza $F_1 = -\rho Suv$. Cuando el agua es lanzada de la lancha hacia atrás con la velocidad u , sobre ésta actúa la fuerza $F_2 = \rho Su^2$. La fuerza resultante que actúa sobre la

lancha por parte del agua es $F = F_1 + F_2 = \rho S u (u + v)$. Esta fuerza es igual a la de la resistencia, puesto que la lancha, o por la condición estipulada, se mueve con velocidad constante: $\rho S u (u + v) = kv^2$. Resolviendo esta ecuación cuadrática se halla que $v = 13,4$ m/s.

1.69. $v = v_0 u / (2u - v_0)$.

1.70. La fuerza que actúa sobre el avión por parte del aire absorbido es $F_1 = M_1 (u - v)$ (véase la solución del problema 1.68); la fuerza que actúa sobre el avión por parte del combustible es $F_2 = m_2 u$. La fuerza resultante $F = F_1 + F_2$ es equilibrada por la fuerza de tracción F_t : $F_t = M_1 (u - v) + m_2 u = 3,2 \cdot 10^4$ N.

1.71. Determinemos la fuerza de tracción de la nave cuando se mueve al encuentro del flujo de partículas. Pasamos al sistema de coordenadas solidario

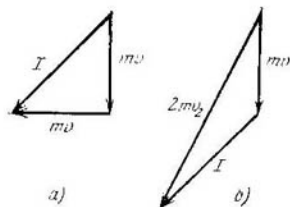


Fig. 1.104.

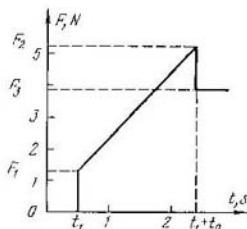


Fig. 1.105.

de la nave. Si en el sistema en reposo la velocidad de las partículas es u , en este sistema será igual a $u + v$. Como el choque es perfectamente elástico, las partículas son rechazadas por el revestimiento con la misma velocidad. La variación del impulso de una partícula es igual a $2m(u + v)$. El número de partículas que chocan con el revestimiento en la unidad de tiempo es $nS(u + v)$, donde n es el número de partículas que hay en la unidad de volumen, y S es la sección de la nave. De este modo, la fuerza de tracción del motor en este caso es $F_1 = 2mnS(u + v^2)$. Después de girar, cuando la nave se mueve en el sentido del flujo, la velocidad de las partículas respecto de la nave será igual a $u - v$ y la fuerza de tracción $F_2 = 2mnS(u - v)^2$. Cuando $F_1/F_2 = 4$ se obtienen dos valores posibles de la velocidad de las partículas: $u_1 = 3v$ y $u_2 = v/3$.

1.72. La velocidad con que el agua sale del grifo es $v_0 = m_1/\rho S = 2$ m/s. La velocidad v que tiene el agua cuando cae en el recipiente se puede hallar por medio de la ley de conservación de la energía: $v = (v_0^2 + 2gh)^{1/2} = 6,6$ m/s. Al caer en el recipiente el agua se frena, se produce un choque perfectamente inelástico, a causa del cual sobre el recipiente actúa una fuerza igual a la variación del impulso del chorro por unidad de tiempo: $F_1 = m_1 v = 1,3$ N. Además, a medida que el recipiente se va llenando, sobre su fondo actúa la fuerza de gravedad del agua, que aumenta linealmente con el tiempo: $F_2 = m_1 g t$. La fuerza total de la presión sobre el fondo es $F = F_1 + F_2$. Su gráfica se representa en la fig. 1.105. El tiempo que tarda el chorro en llegar desde el grifo hasta el recipiente es $t_1 = 2h/(v + v_0) = 0,46$ s. La fuerza inicial de presión sobre el fondo se supone nula. La fuerza de la presión máxima sobre dicho fondo será $F_2 = F_1 + m_1 g t_0 = 5,2$ N. La fuerza de la presión sobre el fondo del recipiente una vez que el chorro deja de caer en él es $F_3 = F_2 - F_1 = 3,9$ N.

1.73. $F = \{(m_1 v)^2 + (Mg)^2\}^{1/2} = 20,4$ N.

1.74. Si el émbolo se desplaza con la velocidad v , la velocidad del chorro (debido a la incompresibilidad del agua) será $u = v(D/d)^2$. Como el rozamiento puede despreciarse, para el agua que hay en el cilindro es válida la ecuación de

$$P_0 + F/S + \rho v^2/2 = P_0 + \rho v^2/2,$$

en la que P_0 es la presión atmosférica; ρ , la densidad del agua, y $S = \pi l^2/4$. De estas relaciones hallamos que

$$v = \frac{2d^2}{D} \left[\frac{2F}{\pi \rho (D^4 - d^4)} \right]^{1/2}.$$

$$1.75. F_2 = F_1/2.$$

1.76. Cuando sobre el cuerpo empieza a actuar la fuerza constante, el realiza oscilaciones en torno a su nueva posición de equilibrio. En el instante en que cesa la acción de la fuerza, la velocidad será máxima si el cuerpo pasa por la posición de equilibrio, es decir, si $t_1 = T/4 + nT/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), donde el período de las oscilaciones del cuerpo es $T = 2\pi \sqrt{m/k} = 0.21$ s. El cuerpo quedará inmóvil una vez que la fuerza deje de actuar, si $t_2 = nT$.

1.77. El alargamiento inicial del muelle es $x_0 = mg/k$. Para que la caja salte el muelle debe actuar sobre ella con una fuerza dirigida hacia arriba mayor que la fuerza de gravedad Mg de la caja, es decir, el muelle debe estar comprimido hasta la longitud $x \geq Mg/k$. Si A es la amplitud de las oscilaciones de la pesa, será $x = A - x_0$, de donde se obtiene $A \geq (M + m)g/k$.

$$1.78. A \geq \mu (H + m)g/k.$$

1.79. En la posición de equilibrio la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo por parte de ambos muelles es nula: $-k_1(l_1 - A) + k_2(l_2 + A) = 0$; de aquí se halla la amplitud de las oscilaciones: $A = |k_1 l_1 - k_2 l_2| / (k_1 + k_2)$. La rigidez de los muelles colocados paralelamente será igual a la suma de las rigideces de los mismos: $k = k_1 + k_2$; por lo tanto, el período de las oscilaciones $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$.

1.80. Uno de los muelles tocará la pared al cabo del tiempo $t_1 = a/v_0$. El tiempo que dura la compresión y extensión del muelle junto a la pared es igual a la mitad del período de las oscilaciones: $t_2 = \pi \sqrt{m/k}$. Después de esto el cuerpo tiene la velocidad v_0 , dirigida en sentido opuesto a la pared, y retorna a la posición inicial al cabo del tiempo $t_3 = t_1 = a/v_0$. El rechazo en la segunda pared se produce en el mismo tiempo. El período de las oscilaciones del cuerpo es

$$T = 2(t_1 + t_2 + t_3) = 4a/v_0 + 2\pi \sqrt{m/k}.$$

1.81. Hallemos el tiempo t durante el cual la bolita se traslada desde la posición de equilibrio hasta la mitad de la amplitud: $A/2 = A \sin(2\pi t/T_0)$. Se sabe que $\sin(\pi/6) = 1/2$, por lo que $t = T_0/12$. En retornar a la posición de equilibrio la bolita tarda el mismo tiempo, ya que cuando el choque es perfectamente elástico la dirección de la velocidad se invierte y su módulo se conserva. En sentido opuesto, a partir de la posición de equilibrio, la bolita se mueve como si la plancha no existiera. Si se desprecia el tiempo que dura el choque de la bolita con la plancha, el período de las oscilaciones es

$$T = 2t + \frac{T_0}{2} = \frac{2T_0}{3} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

1.82. Supongamos que la pesa se traslada una distancia x por la vertical. El alargamiento del muelle en este caso será $x_1 = xL/l$. La fuerza que actúa por parte del muelle sobre el extremo de la barra es $F_1 = kxL/l$. La barra carece de peso, razón por la cual el momento total de las fuerzas que actúan sobre ella debe ser nulo. Por consiguiente, sobre la pesa actúa la fuerza de retorno $F_2 = F_1 L/l = kx$ (L/l^2). Así, pues, puede considerarse que el papel de la rigidez lo desempeña la magnitud $k' = k(L/l^2)$. Con esto el período de las oscilaciones es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{L}} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Trabajo. Potencia. Energía

$$1.83. v = (2kgL)^{1/2} = 24,5 \text{ m/s} = 88 \text{ km/h.}$$

$$1.84. L = H (1/k - \operatorname{ctg} \alpha) = 49 \text{ m.}$$

1.85. La energía potencial inicial del cuerpo se invierte en trabajo contra las fuerzas de rozamiento. Calculemos cuántas veces pasa el cuerpo por el fondo, en uno y otro sentido, antes de pararse:

$$mgH = n \cdot 2kmgL, \text{ de donde } n = H/2kL = 4,167,$$

es decir, después de haber pasado cuatro veces por el fondo, al cuerpo aún le queda cierta reserva de energía. Si x es la distancia desde el centro de la hondonada hasta el punto en que se para el cuerpo,

$$mgH - 8kmgL = kmg(L/2 - x),$$

de donde $x = 8,5 \text{ l} - H/k = 0,33 \text{ m.}$

$$1.86. A = mgH \left(1 + \frac{k_1 + k_2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \right) = 4,5 \text{ kJ.}$$

$$1.87. k \approx (\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2) / (v_2 - v_1) = 0,04.$$

1.88. Cuando el descenso es uniforme la fuerza de resistencia $F = mg \operatorname{sen} \alpha$. Por consiguiente, durante la subida uniforme con la misma velocidad, la fuerza de tracción del motor $F_t = 2mg \operatorname{sen} \alpha$, y la potencia del motor, $N = 2mg \times \operatorname{sen} \alpha \cdot v = 40 \text{ kW.}$

1.89. En el trozo horizontal de carretera la energía del motor sólo se invierte en trabajo contra las fuerzas de resistencia al movimiento del automóvil (resistencia del aire, rozamiento de las ruedas con la carretera y en los ejes). Si F es la fuerza resultante de las resistencias y m_1 , el gasto de gasolina en el trozo horizontal de carretera, se puede escribir que $m_1 q \eta = Fl$. Como durante la subida la velocidad del automóvil sigue siendo la misma de antes, la fuerza de resistencia no varía. Pero ahora, a expensas de la energía del motor, aumentará más la energía potencial del automóvil. La ley de conservación de la energía se escribe en este caso así: $m_2 q \eta = Fl + Mgh$, donde m_2 es el gasto de gasolina durante la subida. Por lo tanto, $m_2 - m_1 = Mgh / q \eta = 2,2 \text{ kg.}$

$$1.90. F = Mq \eta / vt = 3 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

1.91. Si el taxi se mueve sin paradas, el trabajo del motor es $A_1 = Fl$ (y el gasto de gasolina es proporcional a él). Después de cada parada el motor realiza un trabajo adicional, comunicando al automóvil energía cinética. Por eso el trabajo del motor en la ciudad es $A_2 = Fl + nMv^2/2$. La relación entre los gastos de gasolina será $\alpha = 1 + nMv^2/2Fl = 1,7$.

1.92. Las gotas de lluvia al escurrir por las paredes adquieren una velocidad igual a la del tren. En estas condiciones por parte de las gotas actúa sobre el tren una fuerza igual a la variación del impulso de las gotas por unidad de tiempo: $F = m_t v$. Para que la velocidad del tren siga siendo la misma que antes, la fuerza de tracción durante la lluvia deberá aumentar en la misma magnitud: $\Delta F = m_t v$. Esto requiere un aumento de la potencia de la locomotora igual a $\Delta N = \Delta F v = m_t v^2 = 40 \text{ kW.}$

1.93. La energía del martinete se invierte totalmente en vencer la resistencia del suelo. Por eso

$$mv^2/2 + mgl = Fl, \quad F = m(v^2/2l + g) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ N.}$$

De aquí se ve que $mg \ll F$, por lo que la corrección mgl en la ecuación inicial no desempeña un papel importante. Conviene advertir que esta solución sólo es correcta cuando se desprecia la masa del pilote. Si las masas del pilote y del martinete son comparables, la fuerza F dependerá tanto de la masa del primero como del carácter del choque («elástico» o «inelástico») del martinete con el pilote. Recomendamos al lector, como ejercicio individual útil, que obtenga las expresiones exactas para la fuerza F en los casos en que los choques son «elásticos» o «inelásticos».

1.94. Representemos la fuerza de rozamiento F_r en función del camino l recorrido por el trineo sobre el asfalto, en forma de gráfica (fig. 1.106). El área

de la superficie que hay debajo de la gráfica es igual al trabajo de la fuerza de rozamiento. Basándose en la ley de conservación de la energía

$$mv^2/2 = mgkL/2 + mgkx.$$

De aquí se obtiene que $x = 0.84$ m. El camino total recorrido por el trineo hasta detenerse es $l = L + x = 2.84$ m.

$$1.95. F = 6mv^2/l = 150 \text{ N.}$$

1.96. Como la tabla es homogénea, la fuerza de rozamiento que actúa sobre un trozo de tabla de longitud Δx es $\Delta F = kMg \cdot \Delta x/L$. El camino que recorren los distintos puntos de la tabla al girar ésta es $l = \alpha x$, donde x es la distancia desde el extremo en reposo al punto dado (fig. 1.107). El trabajo contra la fuerza

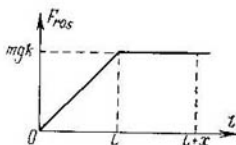


Fig. 1.106.

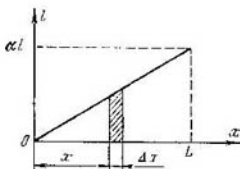


Fig. 1.107.

de rozamiento para el trozo de tabla de longitud Δx , separado del extremo en reposo por la distancia x , es $\Delta A = kMg\alpha x \cdot \Delta x/L$, es decir, salvo el factor constante kMg/L , es igual al área de la superficie rayada en la fig. 1.107. El trabajo total para hacer girar la tabla es igual al área de la superficie que hay debajo de la gráfica multiplicada por kMg/L : $A = kMg\alpha l/2$.

$$1.97. A = (2m + 5\rho V/3) gH/2 = 2.9 \text{ kJ.}$$

1.98. El agua se eleva siguiendo al émbolo hasta la altura $h = 10$ m (¿por qué?). El trabajo realizado con esto es $A_1 = \rho Sh^2g/2$. Durante el movimiento ulterior del émbolo el trabajo que realiza contra la fuerza de la presión atmosférica es $A_2 = P_0S(H - h)$. Así, pues, el trabajo realizado al subir el émbolo es

$$A = \rho Sgh^2/2 + P_0S(H - h) = 10^4 \text{ J.}$$

1.99. Cada vez que el péndulo pasa por la posición de equilibrio, su velocidad aumenta en la magnitud $\Delta v = Ft/m$. Durante un período el péndulo pasa dos veces por la posición de equilibrio. Al cabo de n oscilaciones su velocidad será $v_n = 2nFt/m$. Para que el péndulo se desvíe 90° su energía cinética al pasar por la posición de equilibrio debe ser igual a mgL : $mv_n^2/2 = mgL$, de donde $n = m(2gL)^{1/2}/2Ft$.

1.100. Los cohetes reciben el mismo incremento de velocidad Δv . Si la velocidad del primer cohete era igual a v_0 , el incremento relativo de su energía es

$$\frac{m(v_0 + \Delta v)^2 - mv_0^2}{mv_0^2} = 2 \frac{\Delta v}{v_0} + \left(\frac{\Delta v}{v_0} \right)^2$$

Por la condición del problema, este incremento es igual al 4%: $(\Delta v/v_0)^2 + 2\Delta v/v_0 = 0.04$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos que $\Delta v/v_0 = 0.02$. La velocidad del segundo cohete $v_2 = \Delta v$, y su energía cinética

$$K_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(\Delta v)^2}{2} = (0.02)^2 \frac{mv_0^2}{2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ K.}$$

$$1.101. K = K_0 + Ftv_0 = 5 \text{ J.}$$

1.102. Cuando la cuerda pende simétricamente respecto de la polea, su centro de masas se encuentra a la distancia $l/4$ de sus extremos y a esta misma distancia de la polea. En el instante de abandonar la polea, el centro de masas baja $l/4$ y, por consiguiente, la energía potencial disminuye en $mg l/4$. A expensas de la disminución de la energía potencial, la cuerda adquiere la energía cinética $mv^2/2$. Por la ley de conservación de la energía

$$mv^2/2 = mgl/4, \text{ de donde } v = (gl/2)^{1/2} \approx 10 \text{ m/s.}$$

El movimiento de la cuerda no será uniformemente acelerado.

$$1.103. v_1 = \left[\frac{2g |m_1 l_1 - m_2 l_2|}{m_1 + m_2 (l_2/l_1)^2} \right]^{1/2},$$

1.104. Por unidad de tiempo la bomba eleva a la altura h una masa de agua ρV_t (ρ es la densidad del agua). La potencia que se emplea en esto es $N_1 = \rho V_t g h$. Además, la bomba comunica al agua la velocidad $v = V_t/S$. La potencia que se gasta en acelerar el agua es $N_2 = \frac{mv^2}{2t} = \rho \frac{V_t}{2} \left(\frac{V_t}{S} \right)^2$. La potencia total $N = N_1 + N_2 = \rho V_t (gh + V_t^2/2S^2)$.

1.105. La potencia inicial del ventilador es $N_1 = m_t v^2/2$, donde m_t es la masa de aire lanzada por unidad de tiempo, y v , su velocidad. Para lanzar a través de la misma abertura en la unidad de tiempo una masa de aire dos veces mayor hay que duplicar la velocidad del aire. Por lo tanto, la potencia del ventilador deberá ser $N_2 = 2m_t (2v)^2/2 = 8 N_1$.

1.106. Hallamos primeramente el momento que actúa sobre el árbol del motor. Por definición, la potencia $N = Fv_1 = M_1\omega_1$, donde F es la fuerza que actúa en el punto de engranaje; v_1 , la velocidad lineal del piñón 1, y ω_1 , su velocidad angular. El número de dientes de los piñones es proporcional a sus radios, y las velocidades lineales en el punto de engrane son iguales; por consiguiente

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{r_1} = \frac{\omega_2}{m} = \frac{2\pi n}{m}, \quad M_1 = \frac{Nm}{2\pi n} = 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Como las fuerzas que actúan en el engranaje sobre cada uno de los piñones, de acuerdo con la tercera ley de Newton, son iguales entre sí, $M_2/M_1 = r_2/r_1 = 1/m$, por lo que $M_2 = M_1/m = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$.

1.107. Los cilindros comienzan a moverse uno respecto de otro sin deslizamiento si sus velocidades lineales v_1 y v_2 se hacen iguales, es decir, si $v_1 = v_2 = v$. Designemos la velocidad lineal inicial del primer cilindro por v_0 ; entonces $v_0 = \omega R$. La fuerza de rozamiento F , igual para ambos cilindros, frenará el primer cilindro y acelerará el segundo. La segunda ley de Newton para este caso da que $F = m_1(v_0 - v)/t_1$ y $F = m_2 v/t_2$. Teniendo en cuenta que el tiempo t que dura la acción de la fuerza F es igual para ambos cilindros, tenemos que $m_2 v = m_1(v_0 - v)$, de donde $v = m_1 v_0 / (m_1 + m_2)$. Para hallar las pérdidas térmicas reparamos en que la energía inicial del sistema era $m_1 v_0^2/2$, y la final se hizo igual a $(m_1 + m_2)v^2/2$. La diferencia entre estas dos magnitudes da la cantidad de energía transformada en calor: $Q = m_1 m_2 \omega^2 R^2/2 (m_1 + m_2)$.

1.108. La aceleración a_1 del cuerpo prismático rectangular que se desliza por el plano inclinado se determina por medio de la segunda ley de Newton: $a_1 = g (\sin \alpha - k \cos \alpha)$. El movimiento del aro es más complejo. En primer lugar, cada uno de sus puntos se mueve hacia abajo por el plano inclinado con la aceleración a_1 y, además, gira alrededor del eje del aro. Como el aro rueda sin deslizamiento, la velocidad de su movimiento de avance v_a y la velocidad lineal de rotación alrededor del eje v_r son iguales entre sí en cada instante. En efecto, figurémonos que el aro da una vuelta completa. En este caso su centro de masas recorre a lo largo del plano inclinado el camino $2\pi R$, y un punto cualquiera del aro gira alrededor del centro de masas un ángulo 2π , es decir, recorre a lo largo del aro el camino $2\pi R$. Estos caminos son iguales y son recorridos en igual tiempo, por lo tanto, $v_a = v_r = v$. De acuerdo con la ley de conservación de

$$mgh = mv_0^2/2 + mv_1^2/2 = mv^2$$

(trabajo contra la fuerza de rozamiento no se realiza, ya que la velocidad del punto inferior es nula). Por la cinemática se sigue que $h = (a_2 t^2/2) \operatorname{sen} \alpha$ y $v = a_2 t$. De estas relaciones hallamos que $a_2 = (g/2) \operatorname{sen} \alpha$. Los cuerpos no se adelantarán uno a otro si $a_1 = a_2$, de donde $k(1/2) \operatorname{tg} \alpha$.

Leyes de conservación de la energía y del impulso

$$1.109. l = l_0 + (l_0^2 + 2l_0 H)^{1/2} = 0.66 \text{ m.}$$

1.110. Sea x la compresión del muelle en cierto instante. Por la ley de conservación de la energía $mv^2/2 = mg(H - l + x) - kx^2/2$. La bolita tiene la velocidad máxima cuando la compresión es x_0 , la cual se halla partiendo de la condición $kx_0 = mg$. Teniendo esto en cuenta se obtiene que $v_{\max} =$

$$- [2g(H - l) + mg^2/k]^{1/2}.$$

$$1.111. a = (2H/l - 1)g = 19g.$$

1.112. El peso del piloto, por definición, es la fuerza de la presión que éste ejerce sobre el apoyo (es decir, sobre el asiento). Por la tercera ley de Newton, sobre el piloto actúa con el mismo módulo, pero en sentido opuesto, la fuerza de reacción del apoyo. La suma vectorial de esta fuerza N y de la fuerza de gravedad mg comunica al piloto la aceleración a , igual a la aceleración del avión (fig. 1.108). El peso P del piloto es igual en módulo a la fuerza $N = [(mg)^2 + (ma)^2]^{1/2}$. La aceleración del avión varía durante el proceso de frenado. La aceleración máxima la tiene el avión cuando es máximo el alargamiento del cable, es decir, inmediatamente antes de pararse. En este instante $a = kl/M$, donde k es la rigidez del cable y M , la masa del avión. De la ley de conservación de la energía se sigue que $kl^2/2 = Mv^2/2$, de donde $k = M(v/l)^2$ y $a = v^2/l$. De estas relaciones se deduce el peso máximo del piloto:

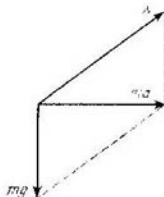


Fig. 1.108.

$$P_{\max} = m(g^2 + v^4/l^2)^{1/2} = 2.2 \cdot 10^5 \text{ N.}$$

$$1.113. T_{\max} = mg + v(km)^{1/2} \approx 10^5 \text{ N.}$$

1.114. Designemos la masa del combustible lanzado por m . De acuerdo con la ley de conservación del impulso del sistema cohete—combustible, tenemos

$$Mv = (M - m) \cdot 4.1v + m(v - 3v), \quad m/M = 0.032 = 3.2\%.$$

1.115. La rotación pura se observará en el sistema de coordenadas solidario del centro de masas. La velocidad del centro de masas la determinamos por la ley de conservación del impulso: $mv_0 = 6mv_C$, $v_C = v_0/6$. Como las masas que hay en los extremos de la barra son la una dos veces mayor que la otra, el centro de masas divide la barra en la relación 1 : 2.

1.116. Basándonos en la ley de conservación del impulso tenemos que $m_1 v_1 = m_2 v_2$, donde v_2 es la velocidad de la carretilla, y v_1 , la del hombre respecto de la tierra. Pero $v_1 = (L - l)t$ y $v_2 = l/t$, siendo t el tiempo que tarda el hombre en pasar de un extremo a otro de la carretilla. Sustituyendo estos valores de v_1 y v_2 en la ecuación inicial, se obtiene que $t = m_1 L / (m_1 + m_2) = 1 \text{ m.}$ El centro de masas de todo el sistema permanece inmóvil.

1.117. $v = [(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2]^{1/2} / (m_1 + m_2)$. Esta velocidad forma con la dirección inicial del movimiento de la tabla un ángulo α , siendo $\operatorname{tg} \alpha = m_2 v_2 / m_1 v_1$.

1.118. El centro de masas del sistema cisterna—agua—cuerpo no puede trasladarse en dirección horizontal porque en esta dirección no actúan fuerzas. Al principio, mientras el cuerpo no llega al agua, la distancia x del centro de

masas del sistema al centro de la plataforma se halla partiendo de la condición $(M + m)x = m_0(l - x)$:

$$x = m_0 l / (M + m + m_0).$$

Cuando el cuerpo flota en el agua, el agua desplazada por él (cuya masa es igual a la del cuerpo) se distribuye uniformemente por toda la superficie y el centro de masas de todo el sistema coincide con el centro de la cisterna. Por consiguiente, el sistema debe desplazarse la distancia x hacia la parte del cuerpo.

Ahora acerca del mecanismo del fenómeno. Cuando el cuerpo entra en el agua, le «empuja» y envía a través de ella impulsos de presión en todos los sentidos. Pero hasta la pared más cercana al cuerpo, por ejemplo, la de la derecha,

el impulso llega antes y empuja a la cisterna hacia la derecha. Cuando el impulso llega hasta la pared opuesta, la cisterna es empujada hacia la izquierda y se para. Como los impulsos pueden reflejarse parcialmente, la posición definitiva del sistema no se puede establecer inmediatamente, sino después de varias oscilaciones.

1.119. Hallamos la velocidad v del segundo fragmento inmediatamente después de la explosión. Por la ley de conservación del impulso tenemos que

$$mv_0 = -mv_0/2 + mv/2, \quad v = 3v_0.$$

Así, la velocidad horizontal del fragmento aumenta tres veces y el tiempo de vuelo hasta el punto de caída permanece invariable. Por lo tanto, la distancia de vuelo aumenta tres veces y el fragmento cae a la

distancia $4a$ del cañón.

1.120. La velocidad inicial v_0 del péndulo se puede determinar por la ley de conservación del impulso: $v_0 = mv/(M + m)$. La altura h a que se eleva el péndulo después del choque con la bala (fig. 1.109), la hallamos por la ley de conservación de la energía:

$$(M + m)v_0^2/2 = (M + m)gh, \text{ de donde } h = v_0^2/2g.$$

Ahora es fácil determinar el ángulo α :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{m^2 v^2}{(M + m)^2 \cdot 2gl}.$$

1.121. La velocidad de la caja después de ser atravesada por la bala se puede hallar por la ley de conservación del impulso: $v = mv_0/2M$. La energía cinética que recibe la caja se invierte en trabajo contra la fuerza de rozamiento. La caja se caerá de la mesa si $Mv^2/2 > kMgl$, de donde $k < m^2 v_0^2 / 8M^2 gl = 0.375$.

1.122. Como al chocar los cuerpos intercambian sus impulsos, la ley de conservación del impulso se cumple automáticamente. Las energías cinéticas de las partículas son:

$$K_1^0 = p^2/2m, \quad K_2^0 = p^2/16m \text{ antes del choque;}$$

$$K_1 = p^2/8m, \quad K_2 = p^2/4m \text{ después del choque.}$$

De acuerdo con la ley de conservación de la energía $K_1^0 + K_2^0 = K_1 + K_2 + Q$, donde Q es la energía mecánica que se pierde en el choque. Sustituyendo los valores de K , se obtiene $Q = 3p^2/16m$.

$$1.123. m_2 = 5m_1/3.$$

1.124. De acuerdo con la ley de conservación del impulso $mv = mv_1 + mv_2/2$. Esta igualdad vectorial puede sustituirse por dos escalares, proyectan-

do los vectores sobre los ejes x e y (fig. 1.110):

$$\begin{aligned}mv &= mv_1 \cos \alpha + (mv_2/2) \cos \beta, \\ 0 &= mv_1 \sin \alpha - (mv_2/2) \sin \beta.\end{aligned}$$

En el choque elástico se cumple la ley de conservación de la energía:

$$mv^2/2 = mv_1^2/2 + m_1 v_2^2/4.$$

Resolviendo conjuntamente estas ecuaciones se halla la velocidad de la segunda partícula: $v_2 = 2v/\sqrt{3} = 1,17v$, que está dirigida bajo el ángulo $\beta = \arcsen(1/2) = 30^\circ$.

1.125. La velocidad v_0 de la bolita m_1 antes del choque puede hallarse de la relación $v_0^2 = 2gh = 2g(l_1 - l_1 \cos \alpha) = gl_1$ (donde $\alpha = 60^\circ$). Como en el instante del choque de las bolitas sobre ellas no actúan fuerzas exteriores en

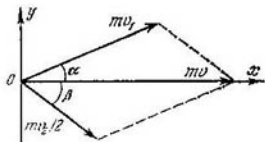


Fig. 1.110.

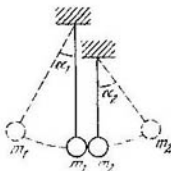


Fig. 1.111.

dirección horizontal, es válida la ley de conservación del impulso: $m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Aplicando la ley de conservación de la energía tenemos que $m_1 v_0^2/2 = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$. De estas relaciones se obtienen

$$v_1 = (m_1 - m_2) v_0 / (m_1 + m_2) \quad \text{y} \quad v_2 = 2m_1 v_0 / (m_1 + m_2).$$

Como $m_1 < m_2$, el sentido de la velocidad v_1 es opuesto al de la velocidad v_0 . En otras palabras, después del choque la bolita m_1 es rechazada hacia atrás y se eleva a la altura $h_1 = v_1^2/2g$. La altura a que se eleva la segunda bolita es $h_2 = v_2^2/2g$. Los ángulos de desviación α_1 y α_2 (fig. 1.111) después del choque se determinan fácilmente: $\cos \alpha_1 = 1 - h_1/l_1$ y $\cos \alpha_2 = 1 - h_2/l_2$. Sustituyendo las expresiones de h y l , se obtiene

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad \text{y} \quad \cos \alpha_2 = 1 - \frac{2m_1^2 l_1}{l_2 (m_1 + m_2)^2}.$$

1.126. Como los impulsos p de todas las esferas, después del choque, son iguales, antes del choque con la tercera esfera el impulso de la segunda debe ser igual a $2p$. Escribimos la ley de la conservación de la energía para el choque de la segunda esfera con la tercera:

$$(2p)^2/2m_2 = p^2/2m_2 + p^2/2m_3, \quad \text{de donde} \quad m_3 = m_2/3.$$

El impulso de la primera esfera antes del choque con la segunda era $3p$; por la ley de conservación de la energía

$$(3p)^2/2m_1 = p^2/2m_1 + (2p)^2/2m_2, \quad \text{de donde} \quad m_2 = m_1/2$$

y, por consiguiente, $m_3 = m_1/6$. Las alturas de elevación las hallamos aplicando la ley de conservación de la energía:

$$m_1 g H = (3p)^2/2m_1 \quad \text{y} \quad m_1 g H_1 = p^2/2m_1,$$

de donde $H_1 = H/9$. Análogamente hallamos $H_2 = 4H/9$ y $H_3 = 4H$.

$$1.127. Q = (1/16) mg (3H - 5h + 2 \sqrt{Hh}).$$

1.128. Si una de las bolitas se sujeta, toda la energía potencial del muelle se transforma en energía cinética de la bolita suelta: $m_1 v_1^2/2 = kx^2/2$. Si las bolitas se sueltan al mismo tiempo salen lanzadas en sentidos opuestos de manera que el impulso total es nulo: $m_1 v_1 = m_2 v_2$, y la energía del muelle comunica energía cinética a ambas bolitas: $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = kx^2/2$. De estas relaciones se hallan

$$v_1 = v_0 \sqrt{m_2/(m_2 + m_1)} \quad \text{y} \quad v_2 = v_0 \sqrt{m_1^2/(m_2 + m_1)m_2}.$$

1.129. Teniendo en cuenta que en el choque inelástico con la cera de modelar se cumple la ley de conservación del impulso, hallamos la nueva amplitud de las oscilaciones: $A = A_0 \sqrt{M/(M + m)}$.

1.130. Como las masas de las bolitas son iguales, la tercera bolita, después del choque, se para, y la segunda adquiere la velocidad v_0 . Suponemos además que el tiempo que dura el choque es pequeño en comparación con el que dura la deformación del muelle. Pero, después del choque, a medida que la segunda bolita se mueve hacia la izquierda, el muelle se deforma y, por medio de él, el movimiento se transmite a la primera bolita. Como sobre el sistema de bolitas no actúan fuerzas exteriores, el centro de masas del sistema se mueve con la velocidad constante $v = mv_0/2m = v_0/2$. Durante el movimiento el muelle oscila. La amplitud de estas oscilaciones puede hallarse por la ley de conservación de la energía:

$$kA^2/2 = mv_0^2/2 - 2m(v^2/2), \quad A = v_0 \sqrt{m/2k}.$$

Las distancias máxima y mínima entre las bolitas son:

$$l_{\text{máx}} = l + A = l + v_0 \sqrt{m/2k} \quad \text{y} \quad l_{\text{mín}} = l - A = l - v_0 \sqrt{m/2k}.$$

1.131. Supongamos que después del último choque las velocidades de las pesas son u_1 y u_2 y la velocidad de la cuenta de vidrio es v . Puesto que $m \ll M$, la velocidad, como resultado de un choque con la cuenta, varía de un modo insignificante, por lo que $u_1 \approx u_2 = u$. Los choques cesan si $v < u$. Aplicamos la ley de conservación de la energía:

$$mv_0^2/2 = Mu_1^2/2 + Mu_2^2/2 + mv^2/2,$$

de donde, teniendo en cuenta que $m \ll M$ y $u_1 \approx u_2 \approx u \approx v$, se obtiene que $u = v_0(m/2M)^{1/2} = 22$ cm/s.

Valiéndose de la ley de conservación del impulso se puede calcular la diferencia entre las velocidades de las pesas $u_2 - u_1$:

$$mv_0 = Mu_2 - Mu_1 - mv,$$

de donde $u_2 - u_1 \approx (m/M)v_0 = 1$ cm/s. Nos hemos cerciorado de que, efectivamente, $u_2 - u_1 \ll u$, y nuestra solución aproximada es completamente correcta.

1.132. Veamos si el cuerpo m pasa el vértice de la rampa. Si no lo pasa, en cierto instante serán iguales las velocidades del cuerpo y de la rampa. Por las leyes de conservación de la energía y del impulso hallamos la altura H_1 , hasta la cual se eleva el cuerpo m por la rampa:

$$mv_0^2/2 = (m + M)v^2/2 + mgH_1, \quad mv_0 = (m + M)v,$$

de donde $H_1 = v_0^2 M/2g(m + M) = 1,04$ m. Como $H_1 < H$, el cuerpo no pasa el vértice de la rampa, sino que después de elevarse hasta la altura H_1 se desliza hacia atrás.

Designamos por v_1 la velocidad final del cuerpo y por v_2 la de la rampa, y aplicamos otra vez las leyes de conservación de la energía y del impulso:

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + Mv_2^2/2, \quad mv_0 = mv_1 + Mv_2,$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones hallamos dos soluciones posibles del problema:

$$v_1 = v_0, \quad v_2 = 0 \quad \text{y} \quad v_1 = -v_0 \frac{M-m}{M+m}, \quad v_2 = v_0 \frac{2m}{m+M}.$$

La primera solución sirve para el caso en que el cuerpo pasa el vértice de la rampa. En nuestro caso se realiza la segunda solución. Sustituyendo las magnitudes por sus valores numéricos se obtienen: $v_1 = -3,33$ m/s y $v_2 = 1,67$ m/s.

$$1.133. \quad v_{\min} = [2gH(M+m)/M]^{1/2} = 6,9 \text{ m/s}.$$

$$1.134. \quad l = L + t(2gH)^{1/2}.$$

1.135. Al final del descenso el saco tiene la velocidad $v_0 = (2gH)^{1/2}$. La descomponemos en sus componentes vertical y horizontal: $v_v = v_0 \sin \alpha$ y $v_h = v_0 \cos \alpha$. El caso no salta al chocar con el suelo (interacción inelástica). Por consiguiente, la componente vertical del impulso del saco se anula bajo la acción de la fuerza de reacción del apoyo. Si la fuerza de reacción media es N y el tiempo que dura el choque es t , el impulso de la fuerza de reacción durante el tiempo del choque será $Nt = mv_0 \sin \alpha$. Como el saco tiene componente horizontal de la velocidad, se mueve durante el choque y sobre él actúa la fuerza de rozamiento $F_r = kN$. De esta forma, la fuerza de rozamiento F_r , lo mismo que la fuerza de reacción N , tiene carácter de fuerza de choque. El impulso de esta fuerza durante el choque es $F_r t = kNt = kmv_0 \sin \alpha \approx 0,6 mv_0$, y el impulso horizontal inicial del saco era $mv_0 \times \cos \alpha = 0,5 mv_0$. Por consiguiente, la componente horizontal de la velocidad del saco se anula antes que la vertical. En este caso la fuerza de rozamiento también se anula y el saco se detiene inmediatamente junto al extremo de la tabla.

$$1.136. \quad l = H(\sin \alpha - k \cos \alpha)(\cos \alpha - k \sin \alpha)^{2/k} \sin \alpha = 0,25 \text{ m}.$$

1.137. En dirección perpendicular al plano de la pared se produce un choque elástico y la componente normal de la velocidad de la bolita cambia de signo. El impulso de la fuerza de la presión normal durante el choque es $I = 2mv \cos \varphi$. El impulso máximo de la fuerza de rozamiento durante este mismo tiempo será $I_{r \max} = kI = 2kmv \cos \varphi$. Por otra parte, debe ser $I_{r \max} \geq mv \sin \varphi$. La bolita será rechazada perpendicularmente si $\tan \varphi \leq 2k$.

1.138. En el sistema de coordenadas solidario del cono las moléculas inciden sobre la superficie del cono bajo un ángulo de 30° respecto de la normal, con la velocidad v , y son rechazadas con una velocidad de igual módulo bajo un ángulo de 60° respecto de la dirección inicial. En el sistema de coordenadas en reposo la velocidad de la molécula rechazada, como se ve en la fig. 1.112, es $v_0 = v\sqrt{3}$. El número de moléculas que chocan en la unidad de tiempo con el cono será $N = \pi H^2 \tan^2 60^\circ \cdot nv = 3\pi H^2 v$. La energía de estas moléculas es

$$K = Nmv^2/2 = (9\pi/2) nmv^2 H^2 = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

1.139. Consideremos el choque de las moléculas con el émbolo en el sistema de coordenadas solidario del émbolo. En este sistema la velocidad de una molécula es igual a $v - u$. Después del choque elástico la molécula es rechazada por el émbolo con una velocidad de igual módulo pero de sentido opuesto (ya que la masa del émbolo es infinita en comparación con la masa de la molécula). En el sistema de coordenadas en reposo la velocidad de la molécula rechazada es $v_1 = -(v - u) + u = -v + 2u$. Por consiguiente, su energía cinética varió en la magnitud

$$\Delta K = \frac{m \cdot (2u - v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 \cdot 4u^2}{2} - \frac{m \cdot 4uv}{2} \approx -2muv.$$

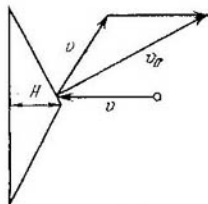


Fig. 1.112.

Como $u \ll v$, será $u^2 \ll uv$ y el primer término se puede despreciar. La parte relativa de energía que se pierde es igual, por lo tanto, a $|\Delta K|/K = 4u/v$.

1.140. La bolita puede chocar con cada escalón de la larga escalera solamente en el caso en que cada vez antes del choque tenga la misma velocidad y choque con el mismo punto del escalón. Con esto la componente horizontal de la velocidad de la bolita no varía durante los choques, y la variación de la componente vertical es compensada a expensas del trabajo de la fuerza de gravedad al caer sobre el escalón siguiente. De aquí la velocidad de la bolita $v = (2gh/\alpha)^{1/2} = 2 \text{ m/s}$.

El tiempo que la bolita está en el aire entre dos choques es $t = l/v \sin \varphi$. La componente vertical inicial de la velocidad después del bote v_v se halla por la condición $(v \cos \varphi)^2 - v_v^2 = \alpha v^2$. En sentido vertical la bolita recorre durante el tiempo t el camino $h = v_v t - gt^2/2$. De estas relaciones se obtiene la ecuación

$$-\frac{h}{l} = \frac{(\cos^2 \varphi - \alpha)^{1/2}}{\sin \varphi} - \frac{l}{h} \frac{\alpha}{4 \sin^2 \varphi}.$$

Sustituyendo en ella α , l y h por sus valores numéricos, hallamos dos soluciones:

$$\varphi_1 = 45^\circ, \quad \text{tg } \varphi_2 = 1/3 \quad (\text{o } \sin \varphi_2 = 1/\sqrt{10}).$$

La primera solución es evidente que no satisface la condición del problema, ya que en este caso la componente vertical de la velocidad desaparece totalmente durante los choques. La segunda solución da $\varphi = 18.5^\circ$.

$$1.141. \quad v \approx v_0 [1 - 4(u/v_0) \cos^2 \varphi]^{1/2} = 720 \text{ m/s}.$$

Movimiento de rotación

1.142. La rodadura puede representarse como la suma de dos movimientos: uno, de traslación del centro del aro y otro, de rotación respecto de su centro. Además, en ausencia de deslizamiento, la velocidad en el punto inferior del aro es nula; por consiguiente, las velocidades de los movimientos de traslación y de rotación son iguales en módulo (en el punto inferior estas velocidades están dirigidas en sentidos opuestos). Designemos estas velocidades por v . De la ley de conservación de la energía se obtiene que $mgh = 2mv^2/2$ y $v = (gh)^{1/2}$.

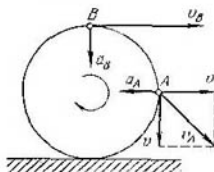


Fig. 1.113.

En el punto A las velocidades de los movimientos de traslación y de rotación son perpendiculares entre sí (fig. 1.113). La velocidad resultante está dirigida bajo un ángulo de 45° con la horizontal y es $v_A = (2gh)^{1/2}$. Análogamente, en el punto B hallamos $v_B = 2(gh)^{1/2}$. Como el movimiento de traslación del aro por el plano horizontal se efectúa a velocidad constante, las aceleraciones de los puntos A y B están dirigidas hacia el centro del aro y son iguales en módulo: $a_A = a_B = v^2/r = gh/r$.

1.143. Sobre las pesas m_1 y m_2 que giran siguiendo una circunferencia sólo actúa la fuerza de tensión T del hilo. Como las pesas se mueven con las aceleraciones centrípetas $\omega^2 r_1$ y $\omega^2 r_2$, basándose en la segunda ley de Newton se puede escribir que $m_1 \omega^2 r_1 = T$ y $m_2 \omega^2 r_2 = T$, de donde $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Valiéndose de esta ecuación y de la condición $r_1 + r_2 = l$, hallamos

$$r_1 = l m_2 / (m_1 + m_2) \quad \text{y} \quad r_2 = l m_1 / (m_1 + m_2).$$

Los valores hallados de r_1 y r_2 corresponden a una posición de equilibrio inestable. En la posición de equilibrio la fuerza de tensión del hilo y la energía ciné-

tica de las pesas son:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l, \quad K = K_1 + K_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \omega^2 l^2.$$

1.144. Como la carga se mueve en el plano horizontal, su aceleración, y por consiguiente la fuerza que actúa sobre ella (resultante de la fuerza de gravedad mg y de la fuerza de tensión del hilo N), está dirigida según la línea AB (fig. 1.114). Es evidente que $F = m\omega^2 R$, donde ω es la velocidad angular, $R = AB$, y m , la masa de la carga. Tomando en consideración que $F = mg \operatorname{tg} \alpha$, $\omega = 2\pi/T$ y $R = L \sin \alpha$, se obtiene que el período $T = 2\pi \sqrt{(L/g) \cos \alpha}^{1/2}$.

1.145. $\omega = [g \operatorname{tg} \alpha / (L \sin \alpha + d)]^{1/2} = 8,3 \text{ rad/s}$.

1.146. Si al girar el árbol la carga sigue pendiendo verticalmente, la fuerza de tensión de la barra no varía y será igual a la fuerza de gravedad de la carga. Pero si la carga se desvía de la posición de equilibrio un ángulo α (fig. 1.115),

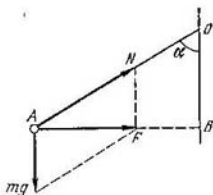


Fig. 1.114.

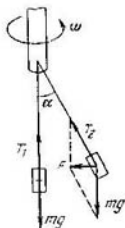


Fig. 1.115.

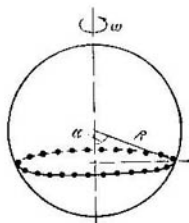


Fig. 1.116.

es posible el equilibrio a condición de que sea $m\omega^2 L \sin \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha$ o $\cos \alpha = g/\omega^2 L$; cualquier otra posición de equilibrio de la barra será inestable. Como $\cos \alpha \leq 1$, la carga puede desviarse solamente cuando $\omega > (g/L)^{1/2} = 3 \text{ rad/s}$. Por consiguiente, si $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ la carga no puede desviarse y $T = T_1 = 100 \text{ N}$. Cuando $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$ la carga se desvía, ya que la posición vertical de la barra corresponde a una posición de equilibrio inestable y la desviada a una estable (¿por qué?). En este caso $T = T_2 = mg/\cos \alpha = m\omega_2^2 L = 160 \text{ N}$.

1.147. Si $\omega \leq (g/R)^{1/2}$, los granitos de arena seguirán descansando sobre el fondo. Si $\omega > (g/R)^{1/2}$, los granitos se encontrarán en una circunferencia tal (fig. 1.116), que $\cos \alpha = g/\omega^2 R$.

1.148. Sobre el automóvil actúa la fuerza de gravedad mg y la fuerza de reacción N del puente, igual en módulo a la presión del automóvil sobre el puente (tercera ley de Newton). Por eso la segunda ley de Newton da inmediatamente que $mg - N = mv^2/R$, donde v^2/R es la aceleración centrípeta. Como por la condición del problema $N = mg/2$, resulta que $R = 2v^2/g = 127 \text{ m}$.

1.149. En el instante del desprendimiento la presión de la cúpula sobre el cuerpo es nula; por consiguiente, la única fuerza que actúa sobre él será la fuerza de gravedad mg . Supongamos que el cuerpo se desprende en el punto A (fig. 1.117); entonces $mg \cos \alpha = mv^2/R$ donde v es la velocidad del cuerpo en el punto A . Se ve fácilmente que $v^2 = 2gR(1 - \cos \alpha)$. De estas relaciones se sigue que $\cos \alpha = 2/3$ y $h = R \cos \alpha = 2R/3$.

1.150. Sobre la arandela actúan (fig. 1.118): N , que es la fuerza de reacción de la esfera, igual en módulo a la fuerza con que presiona la arandela; F , fuerza de rozamiento, tangente a la superficie de la esfera, y mg , fuerza de gravedad de la arandela. La fuerza de rozamiento máxima es $F = kN$, siendo k el coeficiente de rozamiento. La arandela gira alrededor del eje vertical. Basán-

dose en la segunda ley de Newton, la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el plano horizontal AO' será la aceleración centrípeta $\omega^2 R \cos \alpha$, es

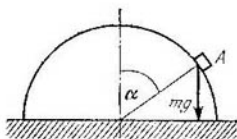


Fig. 1.117.

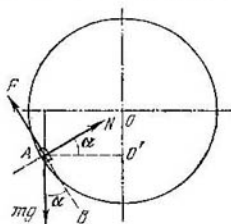


Fig. 1.118.

decir, $N \cos \alpha - F \operatorname{sen} \alpha = m\omega^2 R \cos \alpha$. Como la arandela está en reposo respecto de la superficie de la esfera, la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre la vertical debe ser nula: $mg - F \cos \alpha - N \operatorname{sen} \alpha = 0$. De estas relaciones se halla

$$k = \cos \alpha (g - \omega^2 R \operatorname{sen} \alpha) / (g \operatorname{sen} \alpha + \omega^2 R \cos^2 \alpha).$$

1.151. a) La ley de conservación de la energía da inmediatamente $mv^2/2 = 2mgL$, donde L es la longitud de la varilla; v , la velocidad que se busca, y m , la masa del péndulo. De aquí, $v = 2(gL)^{1/2}$.

b) Este caso se diferencia del anterior en que al pasar el péndulo por el punto superior de su trayectoria el hilo debe estar tenso. En esto instante sobre

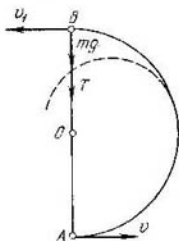


Fig. 1.119.

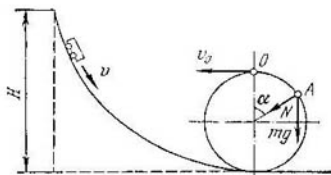


Fig. 1.120.

el péndulo actuará la fuerza de gravedad mg y la fuerza de tensión T del hilo, dirigidas verticalmente hacia abajo (fig. 1.119). La suma de estas fuerzas comunica al péndulo la aceleración centrípeta v_1^2/L , en la que v_1 es la velocidad del péndulo en el punto B. En el caso límite $T = 0$ y $mg = mv_1^2/L$. Con valores menores de v_1 el péndulo no llega al punto B y pasa por debajo de él (línea de trazos en la fig. 1.119). De la ley de conservación de la energía se deduce que $mv^2/2 = 2mgL + mv_1^2/2$. Sustituyendo v_1 por su expresión, se obtiene $v = (5gL)^{1/2}$.

1.152. $T = 6 \text{ mg}$.

1.153. La velocidad de la bolita se puede hallar por la ley de conservación de la energía:

$$mgl = mv_B^2/2 + mg(l - h), \quad v_B^2 = 2gh.$$

Como la fuerza de gravedad en el punto B es tangente a la trayectoria, la aceleración centrípeta sólo se debe a la fuerza de tensión del hilo. Por eso $T = mv_B^2/(l - h) = 4mg$.

1.154. $\omega = (g/l)^{1/2}$.

1.155. $v = (Rg)^{1/2} = 2 \text{ m/s}$.

1.156. Sea H la altura mínima descendiendo desde la cual puede la carretilla recorrer el rizo de la muerte. Entonces la fuerza con que presiona la carretilla sobre los raíles en el punto O será nula (fig. 1.120) (si la fuerza de la

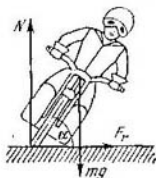


Fig. 1.121.

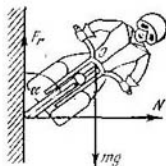


Fig. 1.122.

presión sobre los raíles se anula en cualquier otro punto, la carretilla se desprenderá en este punto y no podrá recorrer todo el rizo). Por lo tanto, en el punto O actúa sobre la carretilla la fuerza de gravedad, que le comunica la aceleración centrípeta $mg = mv_0^2/R$, siendo R el radio del rizo; m , la masa de la carretilla, y v_0 , su velocidad en el punto O . Aplicamos la ley de conservación de la energía: $mgH = mv_0^2/2 + 2mgR$. De estas relaciones se obtiene que $H = 5R/2$.

En el punto A sobre la carretilla actúan la fuerza de gravedad y la fuerza de reacción N de los raíles. La aceleración centrípeta de la carretilla estará definida por la fuerza total que actúa en la dirección del radio del rizo:

$$mg \cos \alpha + N = mv^2/R.$$

La velocidad v de la carretilla en el punto A puede hallarse partiendo de la ley de conservación de la energía:

$$mgH = mv^2/2 + mgR(1 + \cos \alpha).$$

Deduciendo de estas relaciones la expresión de N se obtiene $N = 3mg(1 - \cos \alpha)$. Si $\alpha = 0$, será $N = 0$ de acuerdo con la condición del problema.

1.157. $a = g\sqrt{10}$, $H = 3R/2$ (véase la solución del problema 1.156).

1.158. Sobre el motociclista actúan la fuerza de gravedad mg , la fuerza de reacción N del apoyo, y la fuerza de rozamiento F_r , que le comunica la aceleración centrípeta necesaria para el viraje (fig. 1.121). Se ve fácilmente que $N = mg$, $F_r = kN$ y $F_r = mv^2/R$. La igualdad de los momentos de las fuerzas N y F_r respecto del centro de masas O da $F_r \sin \alpha = N \cos \alpha$. De estas relaciones se obtiene que $\text{ctg } \alpha = k = 0,4$ y $v = (Rgk)^{1/2} = 18,8 \text{ m/s}$. El motorista se inclina respecto de la vertical el ángulo $\beta = \pi/2 - \alpha \approx 22^\circ$.

1.159. $v_1/v = [(k + \text{tg } \alpha)/(1 - k \text{tg } \alpha)]^{1/2}$ (véase la solución del problema 1.158).

1.160. $k \geq (v - 2\pi nR)^2/gR = 0,4$.

1.161. El coeficiente de rozamiento $k = v^2/gR$ (véase la solución del problema 1.158). Las fuerzas que actúan sobre el motociclista cuando marcha por la pared del cilindro se indican en la fig. 1.122. Por definición, $F_r = kN$.

El motorista no resbalará hacia abajo por la pared si $F_r = mg$. Como en este caso la fuerza de reacción N de la pared es la fuerza centrípeta, $N = mv^2/R_1$. Estas relaciones dan que $v^2 = R_1 g/k = R_1 R g^2/v^2$. Para que el motociclista no vuelque es necesaria la igualdad de los momentos de las fuerzas N y F_r respecto del centro de masas O : $F_r d \sin \alpha = Nd \cos \alpha$, donde d es la distancia desde el punto de contacto hasta el centro de masas. En definitiva tenemos que $\operatorname{ctg} \alpha = k = v^2/Rg$.

$$1.162. v = [2kgR \operatorname{sen}(\alpha/2)]^{1/2} = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h.}$$

1.163. La aceleración máxima que puede desarrollar el automóvil se determina por la fuerza de rozamiento: $a = F_r/m = kg$. En este caso la aceleración total del automóvil es la suma vectorial de la aceleración normal (centrípeta) a_n y la aceleración tangencial a_t (fig. 1.123). La aceleración normal se determina

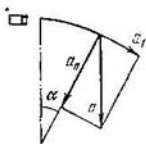


Fig. 1.123

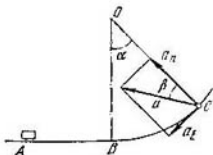


Fig. 1.124

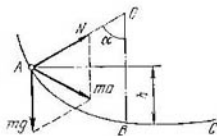


Fig. 1.125.

por la fórmula $a_n = v^2/R$ y alcanza su valor máximo al final del camino, cuando la velocidad es máxima. La aceleración tangencial a_t , por la condición del problema, es constante. Por consiguiente, la velocidad que tendrá el automóvil al final de la carrera será $v = (2a_t l)^{1/2}$, donde $l = \pi R/6$ y, por lo tanto, $a_t = 3v^2/\pi R$. Teniendo en cuenta que $a^2 = a_n^2 + a_t^2$ y sustituyendo en esta relación a , a_n y a_t por sus valores, se obtiene que $v = \left[\frac{kgR}{1 + (3/\pi)^2} \right]^{1/2} = 14,6 \text{ m/s} = 53 \text{ km/h.}$

1.164. La aceleración del cuerpo en el punto C se descompone en sus componentes tangencial y normal (fig. 1.124). La aceleración tangencial la crea la proyección de la fuerza de gravedad: $a_t = g \cos \alpha$. La aceleración normal (centrípeta) la crean la reacción del apoyo y la proyección de la fuerza de gravedad y está determinada por la velocidad del cuerpo en el punto C : $a_n = v_C^2/R$. La velocidad v_C se puede deducir de la ley de conservación de la energía:

$$mv^2/2 = mgh + mv_C^2/2, \quad v_C^2 = v^2 - 2gR(1 - \cos \alpha).$$

La aceleración total del cuerpo en el punto C es $a_C = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} = 94 \text{ m/s}^2$. La dirección de la aceleración forma con el radio trazado por el punto C un ángulo β tal, que $\operatorname{tg} \beta = a_t/a_n = 0,0735$, de donde $\beta \approx 4^\circ$.

1.165. $a = [(g \operatorname{sen} \alpha)^2 + (2gH_1/R)^2]^{1/2} = 63 \text{ m/s}^2$, de donde $H_1 = H - R(1 - \cos \alpha)$.

1.166. Veamos las fuerzas que actúan sobre el trineo en el punto A (fig. 1.125). Como $a = g$ y el ángulo $\alpha = 60^\circ$, será $N = mg$. La suma de las proyecciones de las fuerzas N y mg sobre la dirección del radio de la circunferencia origina la fuerza centrípeta:

$$mv_A^2/R = N - mg \cos \alpha, \quad \text{de donde } v_A^2 = gR/2.$$

La altura del punto A es $h = R(1 - \cos \alpha) = R/2$. El camino que recorre el trineo lo hallamos por la ley de conservación de la energía: $l = h/k + v_A^2/2kg = 3R/4k = 50 \text{ m.}$

$$1.167. h = (2kl - R)/3 = 2,7 \text{ m.}$$

$$1.168. R = l_0/2 + (l_0^2/4 + l_0 v^2/g)^{1/2}.$$

1.169. Sobre el manguito actúan las fuerzas (fig. 1.126): $F = k(l - l_0)$, que es la fuerza de elasticidad del muelle; mg , la fuerza de gravedad del manguito; N , la fuerza de reacción por parte de la varilla. Como en régimen estacionario el manguito gira en un plano horizontal con velocidad angular constante, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él debe ser una fuerza centrípeta:

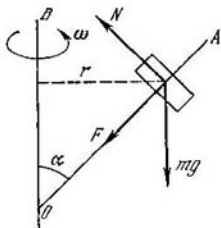


Fig. 1.126.

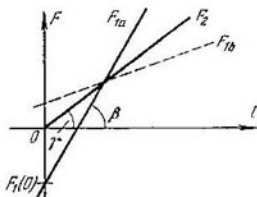


Fig. 1.127.

dirigida según el radio de la circunferencia. Por consiguiente, la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre la vertical debe ser nula:

$$N \sin \alpha - mg - k(l - l_0) \cos \alpha = 0,$$

de donde

$$N = mg / \sin \alpha + k(l - l_0) \cos \alpha / \sin \alpha.$$

Examinemos ahora la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el radio de la circunferencia que describe el manguito:

$$F_1 = k(l - l_0) \sin \alpha + N \cos \alpha = mg \cos \alpha / \sin \alpha + k(l - l_0) / \sin \alpha.$$

Como ya se dijo, esta fuerza, en régimen estacionario, debe ser una fuerza centrípeta: $F_1 = m\omega^2 l \sin \alpha$. El valor en equilibrio de l se deduce de la igualdad $F_1 = F_2$:

$$l = (kl_0 - mg \cos \alpha) / (k - m\omega^2 \sin^2 \alpha).$$

Veamos si la posición hallada del manguito es estable. Para esto se construyen las gráficas $F_1(l)$ y $F_2(l)$ (fig. 1.127). Estas son rectas, una de las cuales (F_2) pasa siempre por el origen de coordenadas; su inclinación viene dada por la condición $\tan \gamma = m\omega^2 \sin \alpha$. La posición de inclinación de la segunda recta (F_1) depende de los parámetros del sistema:

$$\tan \beta = k / \sin \alpha, \quad F_1(0) = (mg \cos \alpha - kl_0) / \sin \alpha.$$

La posición de equilibrio se determina por el punto de intersección de $F_1(l)$ y $F_2(l)$. Son posibles dos tipos de intersección de estas rectas, representados en la fig. 1.127. El caso a) corresponde a la posición de equilibrio estable. Si l aumenta un poco, F_1 crece más de lo necesario para la rotación estable y el sistema retorna a la posición inicial. Exactamente lo mismo ocurre si l disminuye, F_1 resulta menor que F_2 y el radio de la circunferencia aumenta, es decir, el sistema también en este caso retorna a la posición de equilibrio. Por estos mismos razonamientos se ve que el caso b) corresponde a la posición de equilibrio inestable. Como puede verse en la fig. 1.127, el caso a) se realiza cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$mg \cos \alpha / \sin \alpha - kl_0 / \sin \alpha < 0, \quad \text{o} \quad kl_0 > mg \cos \alpha,$$

y

$$k / \sin \alpha > m\omega^2 \sin \alpha, \quad \text{o} \quad \omega < \sqrt{k/m} / \sin \alpha.$$

Así, pues, el manguito sólo tiene una posición de equilibrio estable en la varilla cuando se cumplen estas condiciones. Advertimos, para terminar, que en este problema no se tienen en cuenta las fuerzas de rozamiento y, por consiguiente, cualesquiera perturbaciones del régimen de equilibrio no deben amortiguarse. La diferencia entre las posiciones de equilibrio estable e inestable se manifiestan en lo siguiente: si el manguito se desvía un poco de la posición de equilibrio estable, en adelante realizará oscilaciones pequeñas en torno a esta posición; en cambio, si el manguito se desvía un poco de la posición de equilibrio inestable, se irá lejos y no volverá nunca a una posición próxima a la de equilibrio.

1.170. $\omega = \sqrt{2k/m}$. La arandela puede encontrarse en posición de equilibrio indiferente en cualquier punto de la varilla.

1.171. Como el sistema bolita—esfera está aislado, el centro de masas del sistema no tiene aceleración. Por consiguiente, la rotación se efectúa alrededor del centro de masas. La distancia del centro de masas al centro de la esfera R se halla partiendo de la condición $MR = m(a - R)$, de donde $R = ma/(m + M)$. La fuerza con que la bolita presiona sobre la esfera es igual (por la tercera ley de Newton) a la fuerza con que la esfera actúa sobre la bolita. Esta fuerza comunica a la bolita aceleración centrípeta y, por lo tanto,

$$F = m\omega^2(a - R) = 4\pi^2 m a / (m + M) T^2.$$

Gravitación. Satélites

1.172. El satélite parece inmóvil si gira alrededor del eje de la Tierra con la misma velocidad angular que ésta. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de la atracción de la Tierra; esta fuerza le comunica la aceleración necesaria:

$$m\omega^2 R = GmM_T/R^2, \quad \omega = \omega_T = 2\pi/T_T, \quad T_T = 24 \text{ h},$$

donde G es la constante de gravitación universal. La masa M_T de la Tierra conviene expresarla por medio de la aceleración de caída libre sobre su superficie: $mg = GmM_T/R_T^2$, de donde $GM_T = gR_T^2$. Valiéndonos de estas relaciones obtenemos que $R/R_T = (gT_T^2/4\pi^2 R_T)^{1/3} \approx 6,7$.

1.173. El satélite puede adelantarse a la rotación de la Tierra o retrasarse de ella. Por eso son posibles dos soluciones del problema:

a) El satélite gira más de prisa que la Tierra: $\omega > \omega_T$. En este caso $(\omega - \omega_T) \cdot 2T_T = 2\pi$, y $\omega = 3\pi/T_T$. Utilizando la solución del problema 1.172, se obtiene que $R/R_T = (gT_T^2/9\pi^2 R_T)^{1/3} \approx 5$.

b) El satélite gira más despacio que la Tierra: $\omega < \omega_T$. En este caso $(\omega_T - \omega) \cdot 2T_T = 2\pi$, y $\omega = \pi/T_T$. Respectivamente se obtiene que $R/R_T = (gT_T^2/\pi^2 R_T)^{1/3} \approx 10,5$.

$$1.174. T = 2\pi / [(g/27R_T)^{1/3} - \omega_T/T_T] \approx 0,44 \text{ días} = 10,5 \text{ h}.$$

$$1.175. M_S/T_T = (\omega_T R_T / \omega_I R_I)^2 = 3,5 \cdot 10^5.$$

1.176. Conocemos el período de rotación de la estación espacial «Marte 2» y la longitud del eje mayor de la órbita elipsoidal que describe: $a_M = 2R_M + a + p = 33 \text{ 180 km}$. Consideremos el satélite girando por una órbita circular cerca de la superficie de la Tierra. Para él se podrá escribir que $GmM_T/R_T^2 = 4\pi^2 m R_T / T_1^2$, de donde $T_1^2 / (2R_T)^3 = \pi^2 / 2GM_T$. Es evidente que para un satélite análogo de Marte se obtendría $T_M^2 / (2R_M)^3 = \pi^2 / 2GM_M$. Por la tercera ley de Kepler, para el satélite de Marte tenemos que $T_M^2 / (2R_M)^3 = T^2 / a_M^3$. Valiéndonos de estas relaciones obtenemos: $M_M/M_T = T_1^2 a_M^3 / (2R_T)^3 T^2$. El período de rotación del satélite cerca de la superficie de la Tierra lo hallamos por la condición de que la aceleración centrípeta en este caso es $4\pi^2 R_T / T_1^2 = g$, de donde $T_1^2 = 4\pi^2 R_T / g$. Teniendo esto en cuenta encontramos que $M_M/M_T = \pi^2 a_M^3 / (2R_T g T^2) \approx 0,11$.

$$1.177. M_J/M_T = (T_2/T_1)^2 (R_1/R_2)^3 = 320.$$

1.178. El satélite con la primera velocidad cósmica se mueve por una órbita circular cerca de la superficie de Júpiter. En estas condiciones $mv^2/R_J = GmM_J/R_J^2$. Para Ganimedes $4\pi^2 R/T^2 = GM_J/R^2$. De estas relaciones hallamos que $v = (2\pi R/T) (R/R_J)^{1/2} = 39 \text{ km/s}$.

1.179. Por la tercera ley de Kepler, $(T/T_T)^2 = (a/R_0)^3$, de donde la longitud del semieje mayor de la órbita del cometa Halley es $a = R (T/T_T)^{2/3} \approx 2.7 \cdot 10^9 \text{ km}$; pero $2a = R_{\min} + R_{\max}$, de manera que $R_{\max} \approx 5.2 \cdot 10^9 \text{ km}$.

1.180. Después de frenado el satélite se mueve por una órbita elíptica cuyo semieje mayor es $a = (R + R_T)/2$. Si se aplican las leyes de Kepler al movimiento del satélite por las órbitas circular y elíptica se obtiene que $(T/T_0)^2 = (a/R)^3$. El período de rotación del satélite por la órbita circular lo hallamos por la condición $4\pi^2 R/T_0^2 = GM_T/R^2$. Pero $GM_T = gR_T^2$ (véase la solución del problema 1.172). Utilizando estas relaciones determinamos el período de rotación del satélite por la órbita elíptica:

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \left(\frac{R^3}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{R + R_T}{2R} \right)^{3/2}.$$

Desde el instante en que se frena hasta el aterrizaje, el satélite recorre la mitad de la órbita elíptica. Por eso $t = T/2 = 7.15 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 2 \text{ h}$.

1.181. Si r_1 y r_2 son las distancias de las estrellas a su centro de masas común, $m_1 : m_2 = r_2 : r_1$. Tomando en consideración que $m_1 + m_2 = 2M_S$ y designando por R la distancia entre las estrellas, se obtiene que $m_2 = 2M_S = 2M_S r_1/R$. Como la fuerza de su atracción gravitatoria es para cada estrella la fuerza centrípeta, las estrellas giran alrededor de su centro de masas común; con esto $m_1 \cdot 4\pi^2 r_1/T^2 = Gm_1 m_2/R^2$. Utilizando la expresión de m_2 , se obtiene que $4\pi^2/T^2 = 2GM_S/R^3$. Para el sistema Sol-Tierra, por analogía, se puede escribir $4\pi^2/(T/2)^2 = GM/R_0^3$, donde R_0 es la distancia de la Tierra al Sol, y $M \approx M_S + m_T$. De estas relaciones, se obtiene $R = 2R_0 = 3.0 \cdot 10^8 \text{ km}$.

1.182. El período de las oscilaciones del péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de caída libre, es decir, en la cabina de la nave espacial $g_c = g/4$, pero g_c es la aceleración centrípeta, por lo tanto,

$$g_c = 4\pi^2 r_2/T^2, \quad r_1 + r_2 = L, \quad r_2/r_1 = 0.5, \quad r_2 = L/3.$$

De estas relaciones se obtiene $T = 4\pi (L/3g)^{1/2}$.

$$1.183. h = R \{ T [G\rho/(G\rho T^2 - 3\pi)]^{1/2} - 1 \}.$$

1.184. Sea M_a la masa del asteroide. Como se deduce de la ley de gravitación universal, $g_a = GM_a/R_a^2$, donde g_a es la aceleración de caída libre sobre la superficie del asteroide. Teniendo en cuenta que $M_a = (4/3)\pi R_a^3 \rho_a$, se obtiene $g_a = (4/3)\pi \rho_a R_a G \approx 0.8 \text{ cm/s}^2$. Por la condición del problema, el hombre, en el instante de saltar en la Tierra y en el asteroide posee la misma energía cinética. Por lo tanto, la energía potencial en el punto más alto a que se eleve, tanto en la Tierra como en el asteroide, será también la misma: $mg_a h_a = mgh$, siendo m la masa del hombre; h_a , la altura a que salta en el asteroide, y h , la altura a que salta en la Tierra. Así, $h_a = hg/g_a \approx 64 \text{ m}$.

1.185. La aceleración de caída libre en la superficie del Sol es

$$g_S = GM_S/R_S^2 = (G/R_S^2) \cdot (4/3)\pi R_S^3 \rho_S = (4/3)\pi R_S \rho_S G,$$

donde R_S es el radio del Sol, y ρ_S , la densidad del Sol. Para la Tierra, por analogía, tenemos que $g_T = (4/3)\pi R_T \rho_T G$, siendo R_T el radio de la Tierra, y ρ_T , la densidad de la Tierra. Así, $g_S = g_T R_S \rho_S / R_T \rho_T$. Como $R_S/R_T = 108$ y $\rho_S/\rho_T = 0.25$, en definitiva resulta que $g_S \approx 265 \text{ m/s}^2$.

1.186. Supongamos que la órbita torrestre tiene la forma de circunferencia. La aceleración centrípeta con que la Tierra se mueve por su órbita se determina por la fuerza de gravitación universal: $GM_S m/R_0^2 = m4\pi^2 R_0/T^2$, donde M_S es la masa del Sol y m , la masa de la Tierra. La aceleración de caída libre g_S en la superficie del Sol también viene dada por la ley de la gravitación universal: $g_S = GM_S/R_S^2$. De estas relaciones se obtiene $g_S = 4\pi^2 R_0^3 / R_S^2 T^2 \approx 265 \text{ m/s}^2$.

1.187. El período mínimo de rotación lo tendrá el satélite si se mueve por una órbita circular cerca de la superficie de la estrella, de manera que el radio de su órbita R sea aproximadamente igual al radio de la estrella. La fuerza de atracción gravitatoria es en este caso una fuerza centrípeta: $GmM/R^2 = m\omega^2 R$, donde la masa de la estrella $M = (4/3)\pi R^3\rho$. Para el período de rotación $T = 2\pi/\omega$ se obtiene $T = (3\pi/G\rho)^{1/2} = 1.2 \cdot 10^{-3}$ s.

1.188. En las proximidades de la superficie de la Tierra g es la aceleración centrípeta del satélite: $g = v^2/R$, siendo R el radio de la órbita del satélite. Como $R \approx R_T$, será $v = (gR_T)^{1/2} = 8$ km/s (primera velocidad cósmica). La variación Δv de la velocidad del satélite al hacer el disparo se halla por la ley de conservación del impulso:

$$(M + m)v = M(v + \Delta v) + m(v - u), \text{ de donde } \Delta v = um/M.$$

Después del disparo la órbita del satélite deja de ser circular y se hace elíptica. Como la variación de la velocidad y , por consiguiente, la elipticidad de la órbita son pequeñas, consideraremos la órbita aproximadamente circular y calcularemos cuanto cambia su radio medio. La aceleración del satélite sigue siendo aproximadamente igual a g ; por eso se puede escribir que $g = (v + \Delta v)^2/(R + \Delta R)$, donde ΔR es el aumento medio del radio de rotación del satélite. Teniendo en cuenta que $\Delta v \ll v$ y omitiendo $(\Delta v/v)^2$, se obtiene que $\Delta R = 2muv/Mg = 40$ m.

Observación. El problema puede resolverse rigurosamente aplicando la segunda ley de Kepler (ley de las áreas), como se hace en el problema 1.194. En este caso variación máxima del radio resulta ser dos veces mayor que la media, es decir, $\Delta R = 80$ m. Damos al lector la posibilidad de hacer esto independientemente.

1.189. En los experimentos realizados en la Tierra la energía del muelle se transformaba en energía cinética del cono. Por consiguiente, la energía del muelle comprimido $U = mv_0^2/2$. Supongamos que en la órbita el misil antes de dividirse se mueve con la velocidad v y después de dividirse, con la velocidad v_c el cohete y con la velocidad v_p el cono protector. Por las leyes de conservación de la energía y el impulso, tenemos que

$$(M + m)v = Mv_c + mv_p, \\ (M + m)v^2/2 + mv_0^2/2 = Mv_c^2/2 + mv_p^2/2,$$

de donde $v_{rel} = v_c - v_p = v_0(1 + m/M)^{1/2} = 5.6$ m/s.

1.190. La velocidad angular del satélite varía con el tiempo según la ley $\omega = \omega_0 + \beta t$. En un mes crece en la magnitud $\Delta\omega = \beta t$. En este mismo tiempo el período varía en la magnitud ΔT , de manera que $T_0 + \Delta T = 2\pi/(\omega_0 + \Delta\omega)$. Omitiendo el producto $\Delta T \cdot \Delta\omega$ (por la pequeñez de estas magnitudes), se obtiene aproximadamente que $\Delta T/T_0 = -\Delta\omega/\omega_0 = -\beta t/\omega_0$.

La variación del radio de la órbita se puede calcular valiéndose de la tercera ley de Kepler:

$$(T_0 + \Delta T)^2/(R_0 + \Delta R)^3 = T_0^2/R_0^3.$$

Despreciando en esta igualdad todas las potencias de $\Delta R/R$ y $\Delta T/T$ excepto la primera, tenemos $3\Delta R/R_0 = 2\Delta T/T_0$. Teniendo esto en cuenta resulta $\Delta R = -2\beta t R_0/3\omega_0$. Como $H \ll R_T$, la aceleración del satélite es igual a g ; y en vista de que ésta es la aceleración centrípeta, se tiene que $g = \omega_0^2 R_0$, de donde $\omega_0 = (g/R_0)^{1/2}$. Tomando en consideración que $R_0 = R_T + H$, obtenemos $\Delta R = -2\beta t (R_T + H)^{3/2}/3g^{1/2} \approx -3$ km. Así, al cabo de un mes el satélite se encuentra a la altura $H_1 = H + \Delta R = 497$ km.

1.191. $\beta = -1.05 \cdot 10^{-25}$ rad/s² (véase la solución del problema 1.190).

1.192. Determinamos la altura a que se eleva el cohete. Para esto conviene utilizar la ley de conservación de la energía. Como en este caso la altura a que se eleva el cohete no puede considerarse pequeña en comparación con el radio de la Tierra, empleamos la expresión exacta de la energía potencial en el campo de gravitación: $U = -Gm_1m_2/R$. Por definición éste es el trabajo que realizan las fuerzas de gravitación en trasladar uno de los cuerpos desde el punto dado hasta

el infinito, es decir.

$$U = - \int_R^{\infty} \frac{Gm_1m_2}{R^2} dR.$$

Así, la ley de conservación de la energía da

$$mv^2/2 - GmM_T/R_T = - GmM_T/R.$$

Por la condición, $v = (gR_T)^{1/2}$ y $GM_T = gR_T^2$ (véase la solución del problema 1.172). Utilizando estas expresiones obtenemos que $R = 2R_T$, es decir, el cohete se eleva sobre la Tierra a una altura igual a R_T . Su trayectoria podemos figurárnosla como una elipse estrecha cuyo semieje mayor $a = R_T$. De la tercera ley de Kepler se sigue que el período de rotación por esta elipse es igual al período de rotación del satélite moviéndose por una órbita circular cerca de la superficie de la Tierra: $T = 2\pi (R_T/g)^{1/2}$ (véase la solución del problema 1.190).

De acuerdo con la segunda ley de Kepler el tiempo de vuelo del cohete es proporcional al área barrida por el radio vector trazado desde el centro de la Tierra O (fig. 1.128). El área de la elipse es $S_0 = \pi ab$, donde a y b son las longitudes de los semiejes. El área rayada en la fig. 1.128 es $S \approx \pi ab/2 + \pi b^2$. El tiempo de vuelo es

$$t = TS/S_0 = (\pi + 2) (R_T/g)^{1/2} = 4,12 \cdot 10^3 s \approx 1 \text{ h } 9 \text{ min.}$$

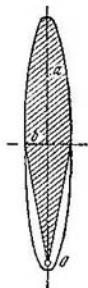


Fig. 1.128.

1.193. Por la condición del problema la velocidad de la cabina a la altura $H = R_L$ debe ser igual en módulo a la velocidad de la nave espacial básica. Como la fuerza de atracción de la Luna es para la nave la fuerza centrípeta, tenemos la condición $GM_L m/(2R_L)^2 = mv^2/2R_L$. Tomando en consideración la igualdad $GM_L = g_L R_L^2$ (véase la solución del problema 1.172), obtenemos para la velocidad de la nave que $v^2 = g_L R_L/2$.

Aplicamos la ley de conservación de la energía a la cabina lunar, utilizando la expresión exacta de la energía potencial en el campo de gravitación (véase la solución del problema 1.192):

$$mv_A^2/2 - GmM_L/R_L = mv_B^2/2 - GmM_L/2R_L.$$

Sustituyendo v por su expresión hallamos $v_0 = (3g_L R_L/2)^{1/2} = 2,1 \text{ km/s}$. Pero debe tenerse en cuenta que en estas condiciones la dirección de la velocidad de la cabina no coincide con la dirección de la velocidad de la nave básica. Para su acoplamiento suave es necesario corregir la dirección de la velocidad.

1.194. a) La ley de conservación de la energía cuando la nave pasa del punto A al punto B da

$$Mv_A^2/2 - GMM_L/(R_L + h) = Mv_B^2/2 - GMM_L/R_L.$$

Por la segunda ley de Kepler el radio vector en intervalos de tiempo iguales barre áreas iguales. Si el intervalo de tiempo Δt es pequeño, estas áreas serán aproximadamente las de los triángulos de base $v\Delta t$ y altura R :

$$(1/2) (R_L + h) v_A \Delta t = (1/2) R_L v_B \Delta t.$$

De estas relaciones hallamos que la velocidad de la nave en el punto A después de desconectar el motor es

$$v_A = [2g_L R_L^3/(R_L + h) (2R_L + h)]^{1/2}.$$

Antes de conectar el motor la nave se movía por una órbita circular y su velocidad (véase la solución del problema 1.193) era $v_0 = [g_L R_L^2 / (R_L + h)]^{1/2}$. El motor debe disminuir la velocidad de la nave en la magnitud

$$\Delta v = v_0 - v_A = \left(\frac{g_L R_L^2}{R_L + h} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{2R_L}{2R_L + h} \right)^{1/2} \right] \approx \frac{v_0 h}{4R_L} = 24 \text{ m/s.}$$

Como el motor funciona durante muy poco tiempo, puede utilizarse la ley de conservación del impulso:

$$Mv_0 = (M - m)(v_0 - \Delta v) + m(u + v_0),$$

donde m es la masa del combustible lanzado. Transformando esta expresión se obtiene $m = M\Delta v / (u + \Delta v) \approx M\Delta v / u = 29 \text{ kg}$.

b) En este caso el problema se resuelve de un modo análogo a como se hizo en el caso a), con la sola diferencia de que el vector Δv está dirigido perpendicularmente al vector v_0 ; por eso $\Delta v = (v_A^2 - v_0^2)^{1/2}$. En definitiva se obtiene

$$\Delta v = h \left(\frac{g_L}{R_L + h} \right)^{1/2} = 97 \text{ kg,} \quad m = M \Delta v / u = 116 \text{ kg.}$$

Aplicación de las leyes de la mecánica en la física nuclear

1.195. El movimiento de las partes del átomo después de escindirse puede ser descrito por las ecuaciones

$$M_1 v_1 = M_2 v_2, \quad M_1 v_1^2/2 + M_2 v_2^2/2 = T,$$

la primera de las cuales expresa la ley de conservación del impulso y la segunda, la ley de conservación de la energía (v_1 y v_2 son, respectivamente, las velocidades de las masas M_1 y M_2). De aquí

$$v_1 = M_2 \left(\frac{2T}{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2} \right)^{1/2}, \quad v_2 = M_1 \left(\frac{2T}{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2} \right)^{1/2}.$$

1.196. La energía cinética del átomo de actinio es $T = Mv^2/2$, donde v es la velocidad del átomo y $M = Am_p = 228m_p$ ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ es la masa del protón). Para hallar la velocidad v aplicamos la ley de conservación del impulso: $Mv = m_e v_e$, siendo v_e la velocidad del electrón y $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ su masa. (En el primer miembro de la última relación se ha despreciado m_e en comparación con M). La velocidad v_e la hallamos por la relación $m_e v_e^2/2 = T_e$. De las ecuaciones dadas se obtiene que $T = T_e m_e / Am_p = 0,42 \text{ eV} = 1,9 \cdot 10^{-20} \text{ J}$.

$$1.197. T_\alpha / (T_\alpha + T) = (A - A_\alpha) / A = 98\%.$$

$$1.198. v = (2m_n T)^{1/2} / (m_n + m_{Cd}) = 10^3 \text{ m/s.}$$

1.199. Sean m_n la masa del neutrón y v_0 su velocidad inicial. Después del primer choque

$$m_n v_0 = 4m_n v'_1 - m_n v_1, \quad m_n v_0^2/2 = 4m_n v_1'^2/2 + m_n v_1^2/2,$$

donde $4m_n$ es la masa del núcleo de helio; v'_1 , su velocidad después del choque, y v_1 , la velocidad del neutrón después del choque. Resolviendo estas ecuaciones determinamos que $v_1 = (3/5)v_0$. Después del segundo choque, análogamente, tenemos

$$m_n v_1 = 4m_n v'_2 - m_n v_2, \quad m_n v_1^2/2 = 4m_n v_2'^2/2 + m_n v_2^2/2,$$

de donde $v_2 = (3/5)v_1 = (9/25)v_0$. Por consiguiente, la energía del neutrón disminuye $625/81 \approx 7,7$ veces.

1.200. Escribamos la ley de conservación del impulso para la dirección en que vuela el núcleo de deuterio y la dirección, perpendicular a ésta, en que vuela el neutrón (fig. 1.129):

$$m_D v_D = m_\alpha v_\alpha \cos \varphi, \quad m_n v_n = m_\alpha v_\alpha \sin \varphi.$$

Por la ley de conservación de la energía

$$m_n v_n^2/2 + m_\alpha v_\alpha^2/2 = m_D v_D^2/2 + Q.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$T_n = \frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left(Q + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} T_D \right) = 12 \text{ MeV}.$$

$$1.201. T_n/(T_\alpha + T_n) = m_\alpha/(m_\alpha + m_n) = 0,8.$$

$$1.202. T_T = Q m_\alpha/(m_\alpha + T_T) = 2,74 \text{ MeV}, \quad T_\alpha = 2,06 \text{ MeV}.$$

$$1.203. T_n = 2,95 \text{ MeV}, \quad T_{Be} = 0,42 \text{ MeV}.$$

$$1.204. v = (m_C v_C + m_\alpha v_\alpha)/(m_C + m_\alpha) = 625 \text{ m/m}.$$

1.205. Como la energía umbral es bastante grande, el impulso del sistema no puede considerarse nulo. El centro de masas del sistema se mueve con la velocidad $v = m_\alpha v_\alpha/(m_\alpha + m_n)$. Como resultado de la interacción, la velocidad del centro de masas no varía, por lo que la energía umbral debe ser mayor que la energía Q absorbida por la reacción: $E_u - Q = (m_\alpha + m_n)v^2/2$. De estas relaciones obtenemos que $Q = E_u m_n/(m_n + m_\alpha)$. Aplicamos la ley de conservación de la energía y el impulso al caso en que la energía de los protones que se forman es nula:

$$E_\alpha = Q + m_O v_O^2/2, \quad m_\alpha v_\alpha = m_O v_O.$$

De estas ecuaciones resulta

$$E_\alpha = Q \frac{m_O}{m_O - m_\alpha} = E_u \frac{m_O m_n}{(m_n + m_\alpha)(m_O - m_\alpha)} = \frac{119}{117} E_u,$$

$$\Delta E = E_\alpha - E_u = (2/117) E_u = 25 \text{ keV}.$$

$$1.206. \Delta E = (1/49) E = 39 \text{ kev (véase la solución del problema 1.205).}$$

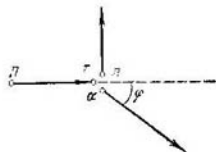


Fig. 1.129.

II. CALOR

Dilatación de los cuerpos

2.1. Hasta 182 °C.

2.2. Supongamos que el volumen de la bola a la temperatura t_1 es igual a V ; entonces a la temperatura t_2 será igual a $V(1 + \beta\tau)$, donde $\tau = t_2 - t_1$. Escribamos las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas:

$$P = \rho V g, \quad P_1 = P - \rho_1 V g, \quad P_2 = P - \rho_1 V g \frac{1 + \beta\tau}{1 + \beta_1\tau},$$

donde ρ es la densidad del vidrio y ρ_1 , la densidad del líquido (ambas a la temperatura t_1). En la fórmula de P despreciamos la fuerza de empuje por ser pequeña la densidad del aire. Por eso no tiene importancia la temperatura a que

hizo esta pesada. De aquí se obtiene que

$$\beta_1 = \frac{P_2 - P_1 + (P - P_1) \beta (t_2 - t_1)}{(P - P_2) (t_2 - t_1)}.$$

En la práctica se suele utilizar una bola de vidrio de cuarzo, cuyo coeficiente de dilatación cúbica es mucho menor que el coeficiente de dilatación cúbica de la inmensa mayoría de los líquidos. En este caso la respuesta se puede simplificar:

$$\beta_1 = (P_2 - P_1) / (P - P_2) (t_2 - t_1).$$

2.3. Vamos a suponer que la línea media de cada lámina conserva la longitud que tendría en estado no curvado (fig. 2.48). El radio r se determina por las condiciones

$$\varphi (r - a/2) = l + \Delta l_1, \quad \Delta l_1 = \alpha_1 \Delta T,$$

$$\varphi (r + a/2) = l + \Delta l_2, \quad \Delta l_2 = \alpha_2 \Delta T,$$

$$(1 + \alpha_1 \Delta T) (r + a/2) = (1 + \alpha_2 \Delta T) (r - a/2).$$

Por consiguiente

$$r = a [2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T] / 2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T = 22,5 \text{ cm.}$$

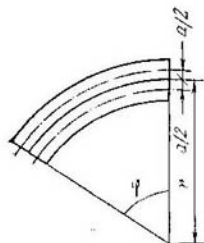


Fig. 2.48.

2.4. Al enfriarse, la barra se contrae. Su longitud se hace igual a $l = l_0 [1 - \alpha (T_2 - T_1)]$, de donde $(l_0 - l)/l_0 = \alpha (T_2 - T_1)$. Después de calentar la barra, apretada en la abrazadera, su longitud sigue siendo l , y la compresión $l - l_0$ estará ahora motivada por las fuerzas elásticas. Escribamos la ley de Hooke: $(l_0 - l)/l_0 = P/E$, donde P es la presión que ejerce la abrazadera sobre la barra en la dirección del eje de ésta. Comparando las expresiones de $(l_0 - l)/l_0$ hallamos

la presión que buscábamos: $P = E\alpha (T_2 - T_1) = 4 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. Conviene advertir que la presión no depende de la longitud de la barra.

2.5. Cuando la barra se calienta desde la temperatura T_1 hasta la temperatura T_2 , sin paredes que la limiten, se alarga en la magnitud

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (l/2) (\alpha_1 + \alpha_2) (T_2 - T_1).$$

Con las paredes limitadoras la barra calentada resulta comprimida en esta misma magnitud. Por la ley de Hooke (la fuerza compresora F es la misma en ambas partes de la barra)

$$\Delta l = \frac{l_1}{E_1} \frac{F}{S} + \frac{l_2}{E_2} \frac{F}{S} \approx \frac{l}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \frac{F}{S}.$$

Esta relación, en términos generales, es aproximada, ya que las longitudes l_1 y l_2 de las partes de la barra a la temperatura T_2 las hemos sustituido por su longitud $l/2$ a la temperatura T_1 . No obstante, se comprende fácilmente que el error relativo que se comete al determinar Δl por esta fórmula será del orden de $\Delta l/l$ y, por lo tanto, nuestra aproximación es muy buena ($\Delta l \ll l$). De las relaciones antes escritas hallamos

$$F = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{E_1 + E_2} E_1 E_2 S (T_2 - T_1).$$

El desplazamiento ΔL de la junta de las partes de la barra se puede determinar tomando en consideración que éste se compone del desplazamiento debido a la dilatación (por ejemplo, de la primera parte de la barra) y del desplazamiento

inverso, causado por la compresión:

$$\Delta L = \frac{l}{2} \left[\alpha_1 (T_2 - T_1) - \frac{F}{E_1 S} \right] = \frac{l}{2} \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} (T_2 - T_1).$$

2.6. Al ser calentada, la longitud de la circunferencia interna del anillo aumentó:

$$l_1 = l_2 [1 + \alpha (T_1 - T_2)], \quad (l_1 - l_2)/l_2 = \alpha (T_1 - T_2),$$

donde l_1 y l_2 son las longitudes de la circunferencia interna a las temperaturas $T_1 = 573$ K y $T_2 = 291$ K. Despreciando la disminución del diámetro del cilindro de acero bajo la acción de los esfuerzos compresores por parte del anillo, consideraremos que, después de enfriarse el anillo, la longitud de su circunferencia interna sigue siendo igual a l_1 y el anillo resulta estirado por las fuerzas elásticas. Como en nuestro caso el grosor del anillo es pequeño en comparación con su diámetro, puede suponerse que el alargamiento relativo de todas sus capas es el mismo e igual a $(l_1 - l_2)/l_2$. Entonces la extensión del anillo se puede relacionar con el esfuerzo de tracción por medio de la ley de Hooke: $(l_1 - l_2)/l_2 = F/ES$, donde F es el esfuerzo de tracción; S , la sección del anillo, y E , el módulo de Young. En definitiva se obtiene que $F = E\alpha (T_1 - T_2) = 3360$ N.

Esta solución no es exacta totalmente debido no sólo a que hemos sustituido la deformación no homogénea del anillo por su alargamiento uniforme, sino también a que las tensiones radiales provocan en el anillo la variación de la longitud de su circunferencia. Cuanto menor sea el espesor del anillo en comparación con su diámetro, tanto menores serán las correcciones a introducir por estas circunstancias.

Ecuación de estado de los gases

2.7. La solución de este problema se reduce a sustituir los valores numéricos en la ecuación de estado gaseoso. Sólo hay que tener en cuenta que la molécula de nitrógeno tiene dos átomos y, por consiguiente, $\mu = 28$ g/mol: $P = mRT/\mu V = 8,8 \cdot 10^4$ Pa.

Observación. Al resolver este problema y la mayoría de los siguientes, la ley de los gases unificada (que llamaremos en adelante ecuación del estado gaseoso) conviene escribirla en la forma universal:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

en la que m es la masa del gas; μ , su masa molar, y R , la constante universal (es decir, molar, igual para todos los gases) de los gases. El valor de R es fácil de obtener por la ley de Avogadro, de acuerdo con la cual 1 mol de cualquier gas, en condiciones normales, ocupa el volumen de $22,4$ dm³. De este modo, si $\nu = m/\mu = 1$ mol, $P = P_0 = 10^5$ Pa y $T = T_0 = 273$ K, será $V = V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3}$ m³/mol y

$$R = P_0 V_0 / T_0 = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}.$$

Como $m/V = \rho$ es la densidad del gas, la ecuación del estado gaseoso puede escribirse también en la forma $\rho = \mu P/RT$. Esta escritura de la ecuación del estado gaseoso también conviene emplearla para resolver una serie de problemas.

2.8. Aplicando al aire que ocupa la capacidad de la habitación a las temperaturas $t_1 = 10^\circ \text{C}$ y $t_2 = 20^\circ \text{C}$ la ecuación del estado gaseoso (resuelta respecto de la masa), tenemos

$$\Delta m = \frac{PV\mu}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 2,2 \text{ kg}$$

Observación. Aquí T_1 y T_2 son las temperaturas absolutas correspondientes a las centígradas t_1 y t_2 . En adelante estas sustituciones de las temperaturas centígradas t por las temperaturas absolutas T no se notifican.

$$2.9. P = \rho RT/\mu = \rho_0 RT/\mu = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa.}$$

2.10. Aplicando la ecuación del estado gaseoso hallamos la relación entre las masas de helio en los casos primero y segundo:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2 + (M_1 - M_2)}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}.$$

De esta relación se sigue que $m_2 = \frac{M_1 - M_2}{P_1/P_2 - 1}$. La capacidad de la botella es

$$V = m_2 RT_1/\mu P_2 = (M_1 - M_2) RT_1/(P_1 - P_2) \mu.$$

Ahora no es ya difícil encontrar la masa que se busca del helio:

$$m = (M_1 - M_2) PT_1/(P_1 - P_2) T_2 = 3 \text{ kg.}$$

Observación. Aquí y en adelante se utiliza la ecuación de estado del gas perfecto (ecuación de Clapeyron — Mendeléiev). No obstante, debe comprenderse claramente que el campo de aplicación de esta ecuación es limitado. Cuando la densidad del gas aumenta, en comparación con su densidad en condiciones normales, 100 veces aproximadamente (para las temperaturas próximas a la ambiente esto corresponde a una presión del orden de 10^7 Pa), la distancia entre las moléculas se hace comparable con el tamaño de éstas. (El cálculo correspondiente proponemos al lector que lo haga él mismo, tomando el radio de las moléculas igual a $(2-3) \cdot 10^{-10}$ m). Con estas densidades los parámetros del gas difieren apreciablemente de los calculados por la ecuación del gas perfecto.

$$2.11. v = (m_1 - m_2) P_2 T_1/(P_1 T_2 - P_2 T_1) \mu = 100 \text{ mol.}$$

2.12. Como se sabe, a la presión $P_0 = 1 \text{ atm}$ (10^5 Pa), 1 mol de gas (para el CO_2 esto es $\mu = 44 \text{ g/mol}$) ocupa el volumen $V_0 = 22,4 \text{ dm}^3/\text{mol}$. La masa de gas m que hay en el botellín lleno se halla por la proporción $m/\mu = PV/P_0 V_0$. La variación de la masa del botellín será

$$\Delta m = m (P - P_0)/P = \mu V (P - P_0)/V_0 P_0 = 0,14 \text{ g} > 0,01 \text{ g.}$$

Por consiguiente, la diferencia de masa entre el botellín lleno y el vacío es fácil de apreciar.

2.13. A temperatura constante la masa de gas que hay en un recipiente de capacidad constante es proporcional a la presión. Por eso el gasto de gas puede medirse en unidades arbitrarias de presión. El cálculo da, para el tiempo de que dispone el submarinista para hacer los trabajos de reparación, el valor $\tau_2 = 20 \text{ min.}$ El tiempo que se busca (desde el instante de la inmersión) es $\tau = 30 \text{ min.}$

2.14. El adsorbente puede absorber $m/50 = 0,02 \text{ kg}$ de hidrógeno. Aplicando la ecuación de estado del gas se obtiene que esta masa de hidrógeno a la presión $P = 10^6 \text{ Pa}$ y la temperatura $T = 80 \text{ K}$ ocupa el volumen $V = 65,6 \text{ dm}^3$. Precisamente este volumen se puede extraer con una masa $m = 1 \text{ kg}$ de adsorbente.

2.15. La presión que se busca es

$$P_1 = \frac{mRT_1}{50\mu(V - m/\rho)} + \frac{PT_1}{T},$$

donde $\mu = 2 \text{ g/mol}$ es la masa molar del hidrógeno.

2.16. De la ecuación del estado gaseoso puede hallarse, por ejemplo, la presión que crearía el propano en el balón si todo él se encontrase en estado gaseoso (a la temperatura ambiente, alrededor de 300 K). La presión que se obtiene es mayor que $3 \cdot 10^7 \text{ Pa}$. Por lo tanto una gran parte del propano se encuentra en estado condensado (líquido).

2.17. A presión constante el volumen del gas es proporcional a la temperatura (ley de Gay-Lussac): $V/V_1 = T/T_1$. Teniendo en cuenta que $T_1 = T + \Delta T$

y $V_1 = V(1 + \beta \Delta T)$, siendo β el coeficiente de dilatación cúbica del gas (igual, por la condición del problema, a $1/335$), se obtiene

$$1/(1 + \beta \Delta T) = T/(T + \Delta T), \text{ de donde } T = 1/\beta = 335 \text{ K.}$$

2.18. Aplicando la ley de Charles y razonando como al resolver el problema 2.17, se obtiene $T = 500 \text{ K}$.

$$2.19. m = \mu V \Delta P / R \Delta T \approx 12 \text{ kg.}$$

2.20. Inicialmente en el volumen V había $\nu = m/\mu = PV/RT = 41,7 \text{ mol}$ de hidrógeno. Para que se formen $0,5 \text{ dm}^3$ ($0,5 \text{ kg}$) de agua se necesitan 500 g : $18 \text{ g/mol} = 27,7 \text{ mol}$ de hidrógeno. Por consiguiente, se han gastado 14 mol o 28 g de hidrógeno.

2.21. Como resultado del calentamiento y la expansión, el gas pasa desde el estado P_1, V_1 al estado $2P_1, 4V_1$. Estos estados están relacionados entre sí por medio de la ecuación $P_1 V_1^n = 2P_1 (4V_1)^n$, de donde $4^n = 1/2$ y el exponente de potencia $n = -1/2$.

2.22. Como las curvas del proceso $PV^n = \text{const}$, cuando $0 < n < 1$, marchan en la gráfica de la dependencia de P respecto de V menos inclinadas que las isotermas $PV = \text{const}$ trazadas por los mismos puntos, si el gas se expande de acuerdo con esta ley la presión descende más lentamente que durante la expansión isotérmica. Por consiguiente, el gas se calienta.

2.23. La botella con nitrógeno reventaría a la presión $P_1 = m_1 RT_1 / \mu_1 V$. Por la condición del problema, la presión del hidrógeno es $P_2 = P_1/5$. La masa de hidrógeno la hallamos por la ecuación del estado gaseoso:

$$m_2 = \mu_2 P_2 V / RT_2 = m_1 \mu_2 T_1 / 5 \mu_1 T_2 = 30,4 \text{ g.}$$

2.24. $T = 1250 \text{ K}$. El cálculo se ha hecho suponiendo que toda el agua se convirtió en vapor. En nuestro caso esto es notoriamente correcto, ya que a temperatura superior a $t = 374,1^\circ \text{C}$ (temperatura crítica del agua), el vapor de agua no puede transformarse en líquido a ninguna presión.

2.25. La presión que se establecería en la vasija una vez vaporizado el nitrógeno (si la vasija no reventara), la hallamos por la ecuación del estado gaseoso $P = mRT/\mu V = 3,47 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Como $P > P_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, la vasija revienta.

$$2.26. \mu_g = \mu_a \frac{m_g}{m_a} \frac{P_a}{P_g} = \mu_a \frac{(m_2 - m_1) P_a}{(m_2 - m_1) P_g} = 48 \text{ g/mol.}$$

2.27. Se determina la cantidad de gas que hay en el balón en los estados primero y segundo: $\nu_1 = P_1 V_1 / RT_1$, $\nu_2 = P_2 V_2 / RT_2$. El volumen que se busca se puede calcular, por ejemplo, así: $\bar{V} = (\nu_1 - \nu_2) V_0 = 755 \text{ dm}^3$, donde $V_0 = 22,4 \text{ dm}^3/\text{mol}$ es el volumen molar del gas en condiciones normales.

$$2.28. T_2 = \frac{P_2 V_1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{V}{V_0} \right) = 255 \text{ K.}$$

2.29. La masa molar del C_3H_6O sería $\mu = 58 \text{ g/mol}$. La masa molar del $(C_3H_6O)_n$ es igual a $n\mu$. Por consiguiente, $n = mRT/\mu PV = 2$.

2.30. Calculando la masa molar del compuesto se obtiene $\mu = 16 \text{ g/mol}$. Por selección se determina que la fórmula buscada es: CH_4 .

$$2.31. CO_2.$$

2.32. La densidad del gas que constituye el rayo globular es igual a la densidad del aire, puesto que dicho rayo flota en éste. También es igual, evidentemente, la presión. Por lo tanto, las masas molares de las substancias del rayo y del aire son inversamente proporcionales a sus temperaturas absolutas y puede hallarse la masa molar de la substancia del rayo: $\mu = \mu_0 T_0/T = 86 \text{ g/mol}$, donde $\mu_0 = 29 \text{ g/mol}$ es la masa molar del aire. El número que se busca de moléculas de agua, ligadas a un ion de nitrógeno, se determina por la relación $n = (\mu - \mu_N)/\mu_a = 4$, siendo $\mu_N = 14 \text{ g/mol}$ la masa molar de los iones de nitrógeno (igual prácticamente a la masa molar del nitrógeno elemental), $\mu_a = 18 \text{ g/mol}$ es la masa molar del agua.

2.33. Se determina el gasto en volumen del gas que pasa por el tubo: $V_\tau = V/\tau = mRT/\mu P \tau$. El gasto en volumen está ligado con la velocidad del mo-

vimiento del gas en el tubo por la relación.

$$V_{\tau} = vS, \text{ de donde } v = V_{\tau}/S = mRT/\mu PS\tau = 0,87 \text{ m/s.}$$

$$2.34. F = (\pi D^2 P_0/4) (1 - T_0/T) = 21 \text{ N.}$$

2.35. La presión en el cilindro se determina por la condición de equilibrio del émbolo y permanece constante: $P = P_0 + Mg/S$. La variación del volumen $\Delta V = V_2 - V_1$ puede expresarse valiéndose de la ecuación del estado gaseoso mediante la variación de la temperatura $T_2 - T_1$:

$$\Delta V = \frac{mR}{\mu P} (T_2 - T_1), \text{ de donde,}$$

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{m}{\mu} \frac{R}{PS} (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} \frac{R}{P_0 S + Mg} (T_2 - T_1) = 41 \text{ cm.}$$

2.36. En ambos casos la pesa estará en equilibrio si la presión dentro del cilindro es constante y satisface la condición $P = P_0 + Mg/S$. Como en el cilindro hay $\nu = 1$ mol de nitrógeno, serán $PV_1 = RT_1$ y $PV_2 = RT_2$; por consiguiente, $\Delta V = R\Delta T/P = 1,64 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$. La pesa subirá a la altura $\Delta h = 164 \text{ cm}$.

2.37. Se escribe la ley unificada de los gases para los dos estados del gas:

$$\frac{(P_0 + mg/S) V}{T_1} = \frac{(P_0 + (M + m) g/S) V}{nT_2}.$$

La variación buscada de la temperatura es

$$T_2 - T_1 = \frac{T_1 [Mg/S - (n-1)(P_0 + mg/S)]}{n(P_0 + mg/S)}.$$

$$2.38. M = 3(m + P_0 S/g).$$

$$2.39. m = Mn(k-1)/(n-1).$$

2.40. Se escriben las condiciones de equilibrio del émbolo en los estados inicial y final:

$$Mg + P_0 S + kx_1 = P_1 S, \quad Mg + P_0 S + kx_2 = P_2 S,$$

en las que M es la masa del émbolo; S , la sección del cilindro; x_1 y x_2 , las variaciones de la longitud del muelle; P_1 y P_2 , las presiones inicial y final del gas, y P_0 , la presión atmosférica. De estas relaciones se obtiene $k(x_2 - x_1) = S(P_2 - P_1)$; al mismo tiempo $x_2 - x_1 = H - h$. Por la ecuación del estado gaseoso, tenemos que

$$P_2 - P_1 = \frac{mR}{\mu S} \left(\frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h} \right), \quad T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{\mu k H (H - h)}{mR}.$$

2.41. Como en la posición inicial la presión del gas es igual a la atmosférica, en dicha posición el muelle no está comprimido. Supongamos que inicialmente el émbolo se encuentra a la altura h . Si el gas se extrae totalmente de debajo del émbolo, la presión atmosférica contraerá el muelle precisamente en la longitud h . Esto da la posibilidad de calibrar el muelle. Por la ley de Hooke $F = kx$, donde k es la rigidez del muelle y x la variación de su longitud. Cuando $x = h$ la fuerza $F = P_0 S$ y, por consiguiente, $k = P_0 S/h$. La presión que el muelle ejerce, a través del émbolo, sobre el gas es $P = F/S = P_0 x/h$. Cuando el volumen del gas aumenta vez y media, el muelle se alarga en la magnitud $h/2$ y carea la presión $P = P_0/2$. Aplicando la ecuación del estado gaseoso, se obtiene

$$P_0 V = \frac{m}{\mu} RT_0, \quad \left(P_0 + \frac{P_0}{2} \right) \cdot \frac{3}{2} V = \frac{m}{\mu} RT,$$

de donde $T = 2.25 T_0$.

2.42. En equilibrio, el gas del recipiente menor tomará la temperatura del hielo, y el del mayor, la del vapor, y las presiones de ambos serán iguales. Se escribe la condición de igualdad de las masas de los gases en todo el volumen en los estados primero y segundo:

$$P_0 \frac{V_1 + V_2}{T_0} = P \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right), \text{ de donde } P = 9 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

$$2.43. T = T_1 \frac{1 - 1/3}{1/3} \frac{V_2}{V_1} = 936 \text{ K (663 } ^\circ\text{C)}.$$

$$2.44. T_2 = T_1 \left(\frac{v_1}{m} - 1 \right) \frac{V_2}{V_1} = 49 \text{ K.}$$

2.45. Las masas de gas que hay en las esferas son iguales, por lo tanto la igualdad de las presiones puede escribirse en la forma $(V_0 + \Delta V)/T_1 = (V_0 - \Delta V)/T_2$, siendo el desplazamiento de la gota $\Delta l = 4\Delta V/\pi d^2 = 29 \text{ cm}$.

$$2.46. \frac{P'}{P} = 3 \left(1 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} \right)^{-1} = 2.4.$$

2.47. $V_1/V = m_1\mu_2/(m_1\mu_2 + m_2\mu_1) = 0.71$, donde $\mu_1 = 2 \text{ g/mol}$ y $\mu_2 = 28 \text{ g/mol}$ son las masas molares del hidrógeno y del nitrógeno; V_1 , el volumen que ocupa el hidrógeno, y V el volumen del cilindro.

2.48. Por la condición del problema, $P_2 = 2P_1$ y $V_2 = V_1/2$ antes del calentamiento, y $V'_2 = V'_1 = (V_1 + V_2)/2 = 3V_1/4$, después del calentamiento. Como la temperatura en la parte superior del cilindro es invariable, puede escribirse $P'_1V'_1 = P_1V_1$, de donde $P'_1 = 4P_1/3$. Tomando en consideración que el émbolo pesado crea en la parte inferior del cilindro una presión adicional invariable (igual a P_1 , como se infiere de la relación $P_2 = 2P_1$). Tenemos que $P'_2 = P_1 + P'_1 = 7P_1/3$. Para la parte inferior del cilindro, por la ecuación del estado gaseoso, se obtiene que $P'_2V'_2/T_2 = P_2V_2/T_1$. Expresando en esta igualdad la presión y el volumen por medio de P_1 y V_1 , hallamos $T_2 = 7T_1/4 = 700 \text{ K}$.

2.49. Se escriben las condiciones de equilibrio del émbolo en los casos primero y segundo:

$$(P_2 - P)S = Mg, \quad (P - P_2)S = Mg,$$

donde P es la presión del hidrógeno (como su temperatura y el volumen que ocupa no varían, la presión tampoco varía); P_1 , la presión del oxígeno en el primer caso; P_2 , la presión del oxígeno en el segundo caso; M , la masa del émbolo, y S , la sección del cilindro. Dividiendo entre sí, miembro a miembro, estas igualdades y teniendo en cuenta que la presión del oxígeno debe disminuir cuatro veces, se obtiene que $P_1 = 8P/5$ y $P_2 = 2P/5$.

2.50. Como los émbolos se encuentran en equilibrio (fig. 2.49), será $P_0 - P = P_2 - P_0$, donde P_2 es la presión en el segundo cilindro. De este modo, $P_2 = 2P_0 - P$. Después de calentar el primer cilindro se obtiene una relación análoga, $P'_2 = 2P_0 - P'$. Por la ecuación del estado gaseoso, para los cilindros primero y segundo, hallamos

$$\frac{P'V'}{T_1} = \frac{PV}{T}, \quad P'_2V' = P_2V, \quad P' = \frac{T_1V}{TV'}, \quad P = \frac{T_1P'_2}{TP_2}P.$$

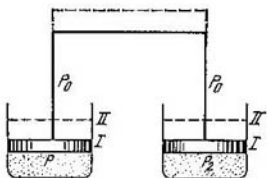


Fig. 2.49.

Sustituyendo aquí P_2 y P_2' por sus expresiones, se obtiene la ecuación para determinar P' :

$$P' = \frac{2P_0PT_1}{2P_0T + P(T_1 - T)}.$$

2.51. La condición de equilibrio del sistema (véase la solución del problema 2.50) es $P_2 = 2P_0 - P_1$. Como las masas de aire en ambos cilindros son iguales y sus volúmenes también lo son, puede escribirse que $P_1/T_1 = P_2/T$. Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$P_1 = \frac{2P_0}{1 + T/T_1}, \quad P_2 = \frac{2P_0}{1 + T_1/T}.$$

2.52. La cantidad de gas introducida debajo del émbolo es $v = PV/PT_1$, donde P es la presión, invariable durante todo el experimento; V , el volumen que inicialmente ocupa el gas en el cilindro (igual, por la condición del problema, a la capacidad del recipiente inferior). Después de abrir la llave se tiene que $v_1 = PV_1/RT_1$ y $v_2 = PV/RT_2$. De la relación $v_1 + v_2 = v$ se obtiene que $V_1/V = v_1/v = (T_2 - P)/T_2 = 3/4$.

2.53. $T_1/T_2 = 1/4$.

2.54. El gas pasará al recipiente menor, ya que su presión P sobrepasaría la magnitud ΔP si todo él permaneciera en el recipiente mayor: $P = P_1T/T_0 = 1.5 \cdot 10^6$ Pa. La conservación de la masa del gas puede escribirse así: $P_2V_2 + (P_2 + \Delta P)V_1 = PV_1$, de donde

$$P_2 = \frac{P_1T/T_0 - \Delta P}{V_1 + V_2} V_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

2.55. El émbolo se situará siempre en una posición en la cual la fuerza de la presión del gas sea igual a la fuerza de elasticidad del muelle contraído. $F = kh$. A la temperatura T se tiene que $P = kh/S$ y $l = hS$; a la temperatura T_1 , $P_1 = kh_1/S$ y $V_1 = h_1S$. Por la ecuación del estado gaseoso se obtiene que $kh_1/T = kh_1^2/T_1$, de donde $h_1 = h\sqrt{T_1/T}$. (Cerciórese de que la masa del émbolo no desempeña papel alguno).

2.56. $h_1 = (V^2/4S^2 + h^2)^{1/2} = V/2S$ (véase la solución del problema 2.55).

2.57. El desplazamiento $x = (l/2) [(1 + 2RT/kl^2)^{1/2} - 1] = 0,5$ m.

2.58. $T_0 = T(T_1 + T)/4$.

2.59. El volumen del gas es proporcional a la razón T/P . Esta magnitud es máxima en el punto 3. Para el punto 1 se tiene que $V_1 = V_{\max}T_1/T_2 = 12,3 \text{ dm}^3$. Por la ecuación del estado gaseoso se halla que la masa del gas es $m = 16$ g.

2.60. $m = 56$ g, $P_1 = 4 \cdot 10^6$ Pa.

2.61. Para la parte del gas que queda en el balón es correcta la relación $P/T_0 = P_0/T$. Por consiguiente, $T - T_0 = T_0(P_0/P - 1) = 121,7$ K.

2.62. Cuando el vacío es el mejor posible, la bomba extrae el gas que se infiltra en el recipiente a causa de la vía de gas. Sean P , la presión límite en el recipiente; T , la temperatura del gas, y m_τ , la masa de gas que se extrae en la unidad de tiempo cuando la presión es P . Entonces $m_\tau = PV_\tau\mu/RT = \Delta PV_\tau\mu/RT\tau$, de donde $P = \Delta PV/V_\tau\tau = 10^{-3}$ Torr.

2.63. Como el pozo horizontal de la mina se comunica con la atmósfera, la presión del aire en él es igual a la atmosférica. En la parte superior de la mina (bajo la tapa, la presión del aire será $P_1 = P_0 - \rho_1gh$, donde ρ_1 es la densidad del aire dentro de la mina. Análogamente, la presión del aire sobre la tapa es $P_2 = P_0 - \rho_2gh$, siendo ρ_2 la densidad del aire atmosférico. Al escribir estas relaciones se supone que las densidades del aire ρ_1 y ρ_2 no varían sensiblemente cuando la altura varía en la magnitud h . Esta suposición es correcta si las variaciones de la presión con la altura (es decir, ρ_1gh y ρ_2gh) son pequeñas en comparación con la presión P_0 .

Las densidades del aire ρ_1 y ρ_2 se pueden determinar por la ecuación del estado gaseoso:

$$\rho_1 = \mu P_0/RT \quad \text{y} \quad \rho_2 = \mu P_0/RT_0.$$

La diferencia de presión es

$$P_2 - P_1 = \rho h \frac{\mu P_0}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) = \rho h \mu \frac{P_0}{RT_0} \left(1 - \frac{T_0}{T} \right).$$

Para la fuerza que actúa sobre la tapa se obtiene que $F = S(P_1 - P_2) = 500$ N. Esta fuerza está dirigida hacia arriba, puesto que $P_1 > P_2$. Para mantener la tapa en equilibrio con ella hay que aplicar una fuerza exterior, dirigida hacia abajo, igual en módulo a la fuerza F . De que la suposición hecha anteriormente acerca de la constancia de ρ_1 y ρ_2 es correcta, el lector puede cerciorarse haciendo el cálculo numérico.

2.64. $T = 390$ K (véase la solución del problema 2.63)

2.65. Expresemos la presión sobre la superficie de Marte por medio de la ecuación del estado gaseoso: $P = \rho RT/\mu$. Como la atmósfera, por la suposición hecha, es de densidad uniforme y su altura mucho menor que el radio del planeta, se puede escribir esta misma presión de otra forma: $P = \rho g_M H$, donde la aceleración de caída libre sobre la superficie de Marte $g_M = GM/r^2$. El resultado que se obtiene es $\mu = RT^2/GMH = 29$ g/mol.

2.66. $T = G\mu MH/Rr^2 \approx 950$ K.

2.67. Con el régimen de combustión estacionario la presión en la cámara del motor será tal, que la velocidad de salida de la masa de gas por la tobera será igual a la velocidad de combustión de la pólvora: $\alpha PS = AP^n$, donde α es cierta constante, de donde

$$P^{1-n} = A/\alpha S \quad \text{y} \quad P = (A/\alpha S)^{1/(1-n)}.$$

La relación de las presiones en la cámara es $P_2/P_1 = (S_1/S_2)^{1/(1-n)}$. En el caso en que $n = 2/3$ y $S_1/S_2 = 2$, se obtiene que $P_2/P_1 = 2^3 = 8$.

2.68. Por la condición del problema, $S_1/S_2 = 2$ y $P_2/P_1 = 4$. Por lo tanto, $4 = 2^{1/(1-n)}$, $1/(1-n) = 2$ y $n = 1/2$ (véase la solución del problema 2.67).

2.69. La masa de gas que en cada instante hay en la cámara se halla por la ecuación del estado gaseoso: $m = \mu PV/RT$. El tiempo que permanece cada porción de carburante en la cámara de combustión es $\tau = m/m_{\tau} = \mu PV/RTm_{\tau} = 8 \cdot 10^{-3}$ s.

2.70. En estado de reposo la presión del gas equilibra la presión atmosférica y la presión del émbolo: $P = P_0 + Mg/S$. Al elevar el cilindro, el gas debe comunicar al émbolo, además, la aceleración $2g$. Por eso la presión en el cilindro aumenta. Se escribe la ley de Boyle — Mariotte: $(P_0 + Mg/S)V = (P_0 + 3Mg/S)V_1$, donde $V_1 = 2V/3$ es el nuevo volumen del gas. De aquí, $M = P_0 S/3g = 3,3$ kg.

2.71. $P_0 = 7Mg/S = 3,5 \cdot 10^5$ Pa.

Mezclas de gases

2.72. Cada tipo de gas que interviene en la mezcla hace una aportación a la presión total igual a su presión parcial, es decir, a la presión que este gas ejercería sobre las paredes del recipiente si en él no hubiera otros gases (ley de Dalton). Para las presiones parciales puede escribirse

$$P_1 = n_1 RT/\mu_1 V \quad \text{y} \quad P_2 = n_2 RT/\mu_2 V,$$

de donde

$$(P_1 + P_2)V = (n_1/\mu_1 + n_2/\mu_2)RT.$$

Por consiguiente,

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{(n_1 + n_2)(P_1 + P_2)}{(n_1/\mu_1 + n_2/\mu_2)RT} = 0,51 \text{ kg/m}^3.$$

2.73. A volúmenes y temperaturas iguales, la cantidad de gas es proporcional a la presión. Por consiguiente, la presión del helio en el tubo debe ser $P_{H1} = 5$ Torr, y la presión del neón, $P_{N2} = 1$ Torr. Helio se necesita más, pero su cantidad total en el balón es menor, por lo que el número de tubos que se

llenar depende únicamente del helio. Por la ley de Boyle — Mariotte puede obtenerse el número de tubos: $n = P_1 V / V_0 P_{H_2} = 333$. Un cálculo más exacto debe tener en cuenta que una vez que la presión en el balón desciende hasta la magnitud P_{H_2} , el gas no pasa al tubo. De acuerdo con esto se precisa el resultado: $n = (P_1 - P_{H_2}) V / P_{H_2} V_0 = 300$.

2.74. El cálculo aproximado (véase la solución del problema 2.73) da 27 balones; el más exacto, 33 balones.

2.75. El cálculo, aplicando la ley de Dalton, da para la masa de nitrógeno

$$m_N = \frac{\mu_N \mu_0}{\mu_0 - \mu_N} \left(\frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{m}{\mu_0} \right) = 56 \text{ g.}$$

donde μ_N y μ_0 son las masas molares del nitrógeno y del oxígeno. En el segundo balón el nitrógeno crea la presión $P_2 = m_N RT_2 / \mu_0 V_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

2.76. Sean m_1 la masa del hidrógeno; m_2 , la masa del oxígeno, y μ_1 y μ_2 , sus masas molares respectivas. Entonces, basándose en la ley del estado gaseoso y en la de Dalton, para la mezcla se puede escribir

$$PV = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) RT, \text{ donde } m_1 + m_2 = m,$$

de donde

$$m_1 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left(\frac{PV}{RT} - \frac{m}{\mu_2} \right) = 13,1 \text{ g.}$$

La masa de oxígeno que hay en el balón es $m_2 = 46,9 \text{ g}$. En la molécula de agua las masas del oxígeno y del hidrógeno se relacionan entre sí como $16 : 2 = 8$. En nuestro caso $m_2/m_1 < 8$, es decir, en el balón hay exceso de hidrógeno. Todo el oxígeno se combinará para formar agua. La masa de agua formada será $M = m_2 \mu / \mu_2 = 52,7 \text{ g}$ (μ es la masa molar del agua).

2.77. En el balón hay $v = 0,1 \text{ mol}$ de hidrógeno y $v = 0,1 \text{ mol}$ de oxígeno. Después de la reacción queda $v_1 = 0,05 \text{ mol}$ de oxígeno y aparece $v_2 = 0,1 \text{ mol}$ de vapor de agua, es decir, la cantidad de sustancia constituye $3/4$ de la inicial. La presión aumentó tres veces. Está claro que la temperatura será cuatro veces mayor que la inicial, es decir, $T = 1200 \text{ K}$.

2.78. La presión inicial P en la primera mitad del recipiente es igual a la suma de las presiones parciales del argón y del hidrógeno

$$P = P_a + P_h = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_h}{\mu_h} \right).$$

Después de terminada la difusión

$$P' = P'_a + P'_h = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_h}{2\mu_h} \right),$$

ya que ahora el hidrógeno ocupa el volumen $2V$. Después de algunas transformaciones fáciles de hacer se halla que $m_a/m_h = 10$.

$$2.79. P = P_a + P_h = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_h}{2\mu_h} \right) = 2,4 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

2.80. Como resultado del proceso de difusión, el helio se distribuye por todo el recipiente, mientras que el hidrógeno permanece en la primera mitad de él. Por la ley de Dalton, la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones que cada uno de los gases ejerce por separado; por eso la presión en la primera mitad será $P_1 = P_H + P_{He}$ y la presión en la segunda mitad, $P_2 = P_H$. Por la ecuación del estado gaseoso se tiene que

$$P_H = m_H RT / \mu_H V \text{ y } P_{He} = m_{He} RT / \mu_{He} 2V,$$

de donde

$$P_1 = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_H}{\mu_H} + \frac{m_{He}}{2\mu_{He}} \right) = 0,37 \cdot 10^5 \text{ Pa y } P_2 = \frac{RT}{V} \frac{m_{He}}{2\mu_{He}} = 0,12 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

2.81. Teniendo en cuenta que las capacidades de los recipientes son iguales, se obtiene que al principio el 20% de la presión lo creaba el helio y el 80%, el hidrógeno. De aquí se sigue que la masa de helio es dos veces menor que la de hidrógeno.

$$2.82. V_2/V_1 = 3.$$

2.83. Inicialmente el oxígeno y la mezcla de helio e hidrógeno ocupaban volúmenes iguales. En estas condiciones la cantidad total de H_2 y de He es igual a la cantidad de O_2 , es decir, a 1 mol. Una vez terminada la difusión del helio, cuando sus presiones por ambos lados del émbolo se igualan, la parte derecha del cilindro constituye las 3/4 partes del volumen, es decir, contiene 3/4 partes de la cantidad total de la mezcla o 3/2 de mol. Pero de oxígeno hay 1 mol; por consiguiente, la parte derecha del cilindro contiene 1/2 mol de helio. En la parte izquierda hay tres veces menos helio, es decir, 1/6 de mol. En el cilindro hay en total 2/3 de mol de helio, o 8/3 de g. y 1/3 de mol de hidrógeno, o 2/3 de g.

2.84. Sean μ_1 , μ_2 y m_1 y m_2 las masas molares del hidrógeno y del helio y sus respectivas masas; M , la masa del émbolo; V y S , la capacidad y la sección del cilindro, y T , la temperatura a la cual se hace el experimento. Se escribe la condición de equilibrio del émbolo en el instante inmediatamente posterior a la introducción de la mezcla de gases en el cilindro:

$$PS = \frac{RT}{V/2} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) S = Mg.$$

Después de terminada la difusión del helio, la fuerza de gravedad del émbolo sólo es equilibrada por la fuerza de la presión del hidrógeno, que ocupa 1/3 de la capacidad del recipiente (las presiones del helio son iguales en ambas partes del cilindro):

$$P_1 S = \frac{RT}{V/3} \frac{m_1}{\mu_1} S = Mg.$$

Igualando estas expresiones se obtiene

$$3 \frac{m_1}{\mu_1} = 2 \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \text{ o } \frac{m_2}{\mu_2} = 2 \frac{m_1}{\mu_1},$$

de donde $m_1/m_2 = 2\mu_1/\mu_2 = 1$, es decir, las masas de helio y de hidrógeno que hay en la mezcla son iguales.

2.85. La cantidad de hidrógeno después de la disociación total se duplica. Por consiguiente, como se infiere de la ecuación del estado gaseoso, la presión P_2 en el recipiente será dos veces mayor que la presión P que se establecería en él en ausencia de la disociación. Por la ecuación del estado gaseoso se tiene que $PV_2/T_2 = P_1V_1/T_1$, de donde $P_2 = 2P = 2P_1V_1T_2/V_2T_1 = 8 \cdot 10^6$ Pa.

2.86. Supongamos que en la mezcla hay N_1 átomos de nitrógeno y N_2 átomos de hidrógeno. La ley del estado gaseoso para los dos casos puede escribirse en la forma

$$PV = (N_1 + N_2/2) kT \text{ y } 3PV = (N_1 + N_2) k \cdot 2T,$$

donde $k = R/N_A$ es la constante de Boltzmann. De aquí se obtiene que $N_1/N_2 = 1/2$.

2.87. Si las moléculas de I_2 no se disociaran, la presión en el recipiente resultaría ser $P_0 = \frac{RT}{V} \frac{m}{\mu} = 8,33 \cdot 10^6$ Pa. Si el grado de disociación de las moléculas I_2 en átomos I es igual a α , en el recipiente habrá $\nu_1 = 2\alpha m/\mu$ de yodo elemental y $\nu_2 = (1 - \alpha)m/\mu$ de yodo molecular. En estas condiciones la presión total en el recipiente, según la ley de Dalton, es igual a la suma de las presiones parciales del I y del I_2 :

$$P = \frac{RT}{V} \cdot 2\alpha \frac{m}{\mu} + \frac{RT}{V} (1 - \alpha) \frac{m}{\mu} = (1 + \alpha) P_0,$$

de donde se deduce que $1 + \alpha = P/P_0 = 1,12$, y $\alpha = 0,12$, es decir, al 12%.

2.88. Si m es la masa de nitrógeno que hay en el recipiente, será αm la masa de nitrógeno disociado y $(1 - \alpha)m$ la masa de nitrógeno molecular. Basándose en la ley del estado gaseoso y en la de Dalton, tenemos

$$P = \frac{RT}{V} \left[(1 - \alpha) \frac{m}{\mu} + \alpha \frac{2m}{\mu} \right] = \frac{RT}{V} (1 - \alpha) \frac{m}{\mu} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

2.89. $m = 0,36 \text{ g.}$

2.90. Si no existiera disociación del CO_2 , la presión en el recipiente sería (véase la solución del problema 2.87) $P_0 = \frac{RT}{V} \frac{m}{\mu} = 98 \text{ kPa}$, donde la masa molar del CO_2 es $\mu = 44 \text{ g/mol}$. Por cada dos moléculas de CO_2 disociadas hay dos moléculas de CO y una molécula de O_2 . Si el grado de disociación del CO_2 es igual a α , en el recipiente habrá $v_1 = (1 - \alpha)m/\mu$ moléculas de CO_2 , $v_2 = \alpha m/\mu$ moléculas de CO y $v_3 = \alpha m/2\mu$ moléculas de O_2 . Aplicando la ley de Dalton para la mezcla de gases, hallamos la presión total P en el recipiente:

$$P = \frac{RT}{V} (1 - \alpha) \frac{m}{\mu} + \frac{RT}{V} \alpha \frac{m}{\mu} + \frac{RT}{V} \alpha \frac{m}{2\mu} = \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) P_0.$$

De aquí se sigue que $1 + \alpha/2 = P/P_0 = 1,1$ y $\alpha = 0,2$, es decir, al 20%.

2.91. Escribamos la ecuación del estado gaseoso para los experimentos primero y segundo, teniendo en cuenta que cuando se disocia 1 mol de SO_3 resultan 1,5 mol de gases:

$$P_1 V = \left[3v_1 \frac{\alpha_1}{2} + v_1 (1 - \alpha_1) \right] RT_1,$$

$$P_2 V = \left[3v_2 \frac{\alpha_2}{2} + v_2 (1 - \alpha_2) \right] RT_2.$$

Por la condición del problema $P_1 = P_2$. De donde

$$\alpha_2 = 2 \left[\frac{T_1 v_1}{T_2 v_2} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) - 1 \right] = 0,75.$$

$$2.92. \alpha_2 = \frac{P_2 v_1}{P_1 v_2} (1 + \alpha_1) - 1 = 0,25.$$

Hidroaerostática

$$2.93. F = 0,5 \rho g a (h_1^2 - h_2^2) = 1,57 \cdot 10^5 \text{ N.}$$

2.94. Designemos por P_0 la presión atmosférica y por P la presión del agua sobre el émbolo superior. La presión del agua sobre el émbolo inferior es igual a $P + \rho g l$, donde ρ es la densidad del agua. Escribamos la condición de equilibrio de los émbolos:

$$P_0 S_1 + T = P S_1 \text{ y } (P + \rho g l) S_2 = P_0 S_2 + T.$$

De aquí se obtiene que $T = \rho g l S_1 S_2 / (S_1 - S_2)$.

2.95. Cuando se abre la llave, el agua empieza a pasar al recipiente de la derecha, ya que en el de la izquierda la presión es mayor. Sea x la altura de la columna de agua que pasa. Entonces la condición de igualdad de la presión en el codo inferior del tubo se puede escribir en la forma $\rho_1 (H - h_2 - x) = \rho_2 H + \rho_1 (x - h_2)$, de donde se obtiene que

$$x = 0,05 \text{ m, } H_1 = H - x = 0,95 \text{ m y } H_2 = H + x = 1,05 \text{ m.}$$

En el caso en que $h_1 = 0,02 \text{ m}$, cuando x alcanza el valor $0,04 \text{ m}$ el agua deja de pasar; por consiguiente, $H_1 = 0,98 \text{ m y } H_2 = 1,02 \text{ m}$.

2.96. Cuando el líquido se dilata, en el vaso calentado no varía la presión sobre el fondo; por lo tanto, el nivel H_0 del líquido en el segundo vaso sigue siendo el mismo que antes. La condición de equilibrio del líquido en los vasos comunicantes se escribe en la forma $\rho_0 g H_0 = \rho g H$, en la que ρ y H son la densidad y la altura de la columna de líquido en el vaso calentado. De la ley de la dilatación se sigue que $1/\rho = 1 + \beta \Delta T / \rho_0$, donde $1/\rho_0$ y $1/\rho$ son los volúmenes específicos de los líquidos. De estas relaciones se obtiene que

$$H/H_0 = \rho_0/\rho = (1 + \beta \Delta T), \text{ y } \Delta H = H - H_0 = H_0 \beta \Delta T.$$

Sustituyendo las magnitudes por sus valores numéricos resulta que $\Delta H = 2,6$ mm.

2.97. Sea ρ la densidad del líquido a la temperatura inicial. Entonces, cuando la temperatura se eleva en la magnitud Δt , la densidad se hace igual a $\rho/(1 + \beta \Delta t)$. Designemos por Δ_1 la elevación del nivel del líquido en el vaso de la izquierda y por Δ_2 , en el de la derecha y escribamos la condición de conservación de la masa de los líquidos:

$$\rho (2Sh + S\Delta_1)/(1 + \beta \Delta t) + \rho S(h + \Delta_2) = \rho h(2S + S).$$

La condición de equilibrio será la igualdad de las presiones en los extremos del tubo comunicante:

$$\rho g(h + \Delta_1)/(1 + \beta \Delta t) = \rho g(h + \Delta_2).$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene que $\Delta_2 = h\beta \Delta t/2(1 + \beta \Delta t)$. Despreciando $\beta \Delta t$ en el denominador, resulta $h_x \approx h(1 + \beta \Delta t/2)$.

2.98. $h_x \approx h(1 - \beta \Delta t/4)$.

2.99. Escribamos las condiciones de equilibrio para los dos primeros casos:

$$M_1 g/S_1 + \rho g h = M_2 g/S_2 \text{ y } M_1 g/S_1 + m g/S_1 = M_2 g/S_2,$$

en las que S_1 y S_2 son las secciones de los émbolos y ρ , la densidad del agua. Teniendo en cuenta que $m = 2M_1$ y $M_2 = 2M_1$, de estas relaciones resulta que $S_2 = 2S_1/3$ y $ph = 2M_1/S_1$. Escribamos ahora la condición de equilibrio para el tercer caso:

$$M_1 g/S_1 + \rho g H = (m + M_2) g/S_2,$$

donde H es la diferencia de niveles en los cilindros buscada. Tomando en consideración las expresiones antes obtenidas, puede escribirse que $\rho H = 5M_1/S_1 = 5ph/2$. Por lo tanto, el primer émbolo resultará estar $H = 5h/2 = 25$ cm más alto que el segundo.

2.100. En ausencia de la pesa, el segundo émbolo estará $H = h/6 = 1,66$ cm más bajo que el primero.

2.101. Como el mercurio no moja el filtro, en la entrada del canal se forma un menisco con una curvatura tal, que la acción de la fuerza de la tensión superficial (por unidad de superficie) equilibra la presión sobre la superficie del menisco que ejerce la columna de mercurio y la presión adicional P_0 : $P = P_0 + \rho g h$. La condición de equilibrio del menisco puede escribirse en la forma $P = 2\sigma/r$, siendo r el radio de la superficie del menisco en el canal. El valor mínimo de este radio es igual al del radio de canal r_c . Por eso el mercurio empieza a ser empujado a través del filtro cuando se cumple la condición

$$P_0 = \rho g h = 2\sigma/r_c, \text{ de donde } r_c = 2\sigma/(P_0 + \rho g h).$$

Sustituyendo las magnitudes por sus valores numéricos hallamos que $r_c = 10$ μ m.

2.102. Valiéndose de la pipeta el líquido se puede dosificar con una exactitud de hasta la masa de una gota $m_0 = 0,01$ g. Mientras la gota no se desprende toma la forma con la cual la componente vertical de la fuerza de la tensión superficial equilibra la fuerza de la gravedad que actúa sobre la gota. La componente vertical de la fuerza de la tensión superficial toma su valor máximo $2\pi r\sigma$ (r es el radio del orificio de la pipeta y σ , la tensión superficial del agua) en el instante inmediatamente anterior al desprendimiento, cuando la gota, por la acción de la gravedad, se alarga de tal modo que su parte superior toma

la forma cilíndrica. Así, en el instante del desprendimiento.

$$mg = 2\pi r\sigma, \text{ de donde } \sigma = mg/2\pi r = 0,078 \text{ N/m}$$

2.103. Cortemos mentalmente sobre la superficie de la pompa de jabón un pequeño cuadrado de lado a y consideremos su equilibrio bajo la acción de las fuerzas de tensión superficial y de las de la presión (fig. 2.50). Sobre cada

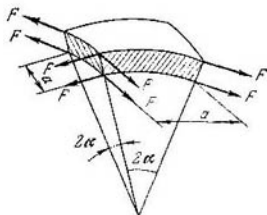


Fig. 2.50.

lado del cuadrado, tangencialmente a su superficie, actúa la fuerza $F = \sigma a$. La resultante de dos de estas fuerzas aplicadas a lados opuestos del cuadrado, como se ve en la fig. 2.50, es igual a $2\sigma a \sin \alpha$. Como la película de jabón tiene dos superficies, habrá cuatro pares de fuerzas como éste. La fuerza debida a la presión adicional P dentro de la pompa es igual a Pa^2 . La condición de equilibrio del elemento de superficie de la pompa considerado se escribe en la forma

$$Pa^2 = 4 \cdot 2\sigma a \sin \alpha, \text{ de donde } P = 8(\sigma/a) \sin \alpha.$$

En virtud de que para ángulos pequeños $\sin \alpha \approx \alpha$, se tiene que $P = 8\sigma a/2r\alpha = 4\sigma/r$; aquí se ha tenido en cuenta que $a = 2r\alpha$.

Observación. Llamamos la atención sobre el hecho de que al resolver este problema se han tenido en cuenta las fuerzas de tensión superficial que actúan sobre las dos superficies de la película de jabón. Cada superficie de la película de jabón crea una sobretensión $P = 2\sigma/r$.

2.104. El volumen V de la gota de mercurio es igual aproximadamente al volumen del cilindro de radio r y altura d que se halla por la condición

$$\pi r^2 d = m/\rho, \text{ de donde } d = m/\pi r^2 = 9,36 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Como la relación d/r es muy pequeña, al calcular d se puede omitir el volumen adicional V' de la parte convexa de la gota (es fácil calcular que $V'/V = \pi d/4r$). La fuerza de tensión superficial crea dentro de la gota una presión adicional $P = 2\sigma/d$. La fuerza que hay que aplicar a la placa, igual a la presión adicional P multiplicada por el área de la superficie de contacto de la gota con la placa es $F = 2\sigma\pi r^2/d = 780 \text{ N}$.

2.105. Como la superficie lateral de la gota entre los vidrios será cóncava, la fuerza de tensión superficial producirá una disminución de la presión dentro de la gota igual a $P = 2\sigma/d$. En esta fórmula se ha tenido en cuenta (lo mismo que en el caso en que el líquido no mojaba en absoluto) que el radio de curvatura de la superficie lateral de la gota se puede considerar igual a $d/2$. La fuerza de atracción entre las láminas será igual a la diferencia de las presiones fuera y dentro de la gota, multiplicada por el área de la superficie de contacto de la gota con las láminas:

$$F = PS \frac{2\sigma}{d} \frac{m}{\rho d} = 1,46 \cdot 10^3 \text{ N.}$$

2.106. Se ve fácilmente que la presión dentro de la columna de aceite, arrastrada por las fuerzas de la tensión superficial hacia dentro del tubo, será negativa (es decir, la columna estará estirada, y no comprimida). En efecto, en las condiciones de este experimento la presión exterior sobre la superficie del aceite será nula. Por eso la presión dentro de la columna al nivel del aceite en el platillo también será nula, ya que las presiones en un líquido en puntos situados a un mismo nivel son siempre iguales. En todos los puntos dentro de la columna la presión será menor que cero en la magnitud de la presión hidrostática. En

particular, para los puntos que se encuentran en el nivel $h/3$, se tendrá que $P = -\rho gh/3$. La altura h se puede determinar escribiendo la condición de equilibrio de la columna bajo la acción de la fuerza de gravedad y de la fuerza de la tensión superficial: $h = 2\sigma/\rho gr$. Sustituyendo h , en la fórmula de P , por esta expresión, hallamos que $P = -2\sigma/3r$.

2.107. A la presión atmosférica $P_0 = 1 \text{ atm}$ (10^5 Pa) corresponde la presión de una columna de altura $H = 10 \text{ m}$; por consiguiente, a la profundidad $h = 40 \text{ m}$ la presión (teniendo en cuenta la atmosférica) será $P_1 = 5 \text{ atm}$. El volumen V_1 que puede ocupar el aire, es decir, el volumen de agua que él puede desplazar, se halla por la ecuación del estado gaseoso: $V_1 = VPT_1/P_1T = 920 \text{ dm}^3$.

2.108. $\tau = l^3 (P_0 + \rho gH)/V\tau P_0 = 24 \text{ min}$.

2.109. La columna de mercurio se encuentra en equilibrio cuando

$$\rho ghS = P_0S - PS, \quad P = \rho g(H - h), \quad \text{donde } P_0 = \rho gH.$$

Como la temperatura no varía,

$$PV = P_0V_0, \quad P(l - h)S = P_0(l/2)S,$$

o bien

$$P = \frac{P_0 l}{2(l - h)}, \quad \rho g(H - h) = \frac{\rho g H l}{2(l - h)},$$

de donde

$$h^2 - (H + l)h + \frac{Hl}{2} = 0, \quad h_{1,2} = \frac{H + l}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + l^2}$$

Pero, por el sentido del problema, $0 < h < l$ y, por lo tanto, $h_1 > l$ no puede ser solución del problema. Queda, pues,

$$h = \frac{H + l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + l^2}.$$

Se advierte que al resolver este problema no se han tomado en consideración las fuerzas de la tensión superficial.

2.110. El estado del aire en la rama derecha del tubo se subordina a la ley de Boyle—Mariotte. En el primer caso $P_1 = P_0 + \rho gL/3$ y $V_1 = LS/3$. Si se designa por x la altura de la columna de aire en el segundo caso (después de dejar salir parte del líquido), entonces

$$(P_0 + \rho gL/3)LS/3 = P_0xS, \quad \text{de donde } x = (1 + \rho gL/3P_0)L/3.$$

La variación relativa de la masa del líquido será igual a

$$\frac{2x - L/3}{2L - L/3} = \frac{1}{5} \left(1 + 2 \frac{\rho gL/3}{P_0} \right).$$

2.111. El émbolo estará en equilibrio si la presión en la probeta es igual a $P_0 + \rho g(H - x)$. En este caso, por la ley de Boyle—Mariotte, se obtiene

$$[P_0 + \rho g(H - x)]xS = P'LS, \quad x^2 - \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)x + \frac{P' L}{\rho g} = 0.$$

de donde

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P' L}{\rho g}}.$$

Hay que determinar cual de las soluciones obtenidas de la ecuación cuadrática es correcta en las condiciones del problema. Para esto se representa en una gráfica la ley de Boyle—Mariotte para el gas que hay dentro de la probeta:

$Px = \text{const}$ (curva 1 en la fig. 2.51). En la misma gráfica se construye la dependencia $P = P_0 + \rho g (H - x)$ (recta 2). A la condición de equilibrio del émbolo corresponden los puntos de intersección de la curva 1 con la recta 2, es decir, los puntos a y b . Se ve fácilmente que la posición del émbolo en el punto b es la posición de equilibrio inestable. En efecto, si el volumen del gas aumenta casualmente un poco, la presión hidrostática disminuye más que la presión del gas en

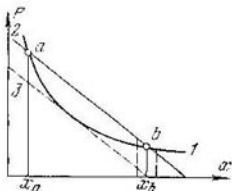


Fig. 2.51.

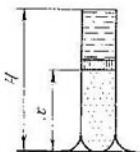


Fig. 2.52.

la probeta y el gas expulsa el émbolo. Si, por el contrario, el volumen disminuye un poco, la presión hidrostática aumenta más que la presión del gas y el émbolo se hunde en la probeta hasta la posición x_a . Por los mismos razonamientos se comprende que x_a es la posición de equilibrio estable. Así,

$$x = \frac{1}{2} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P'L}{\rho g}}$$

Este problema tiene solución si la expresión subradical es mayor que cero, es decir,

$$\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P'L}{\rho g} > 0, \text{ de donde } H > 2 \sqrt{\frac{P'L}{\rho g} - \frac{P_0}{\rho g}}.$$

En la fig. 2.51 esto corresponde a la condición de que la recta 2 pase más a la derecha que la recta 3.

$$2.112. T_0 = 3TP_0/(P_0 + \rho gL/3).$$

$$2.113. T_1/T = (2P_0 - \rho gL)/(2P_0 + \rho gL).$$

2.114. La presión del gas es $P = \rho g (H - x)$ (fig. 2.52). Su volumen es $V = xS$. Por consiguiente,

$$xS\rho g(H - x) = \frac{mRT}{\mu} \quad \text{y} \quad x^2 - Hx + \frac{mRT}{\mu S\rho g} = 0.$$

de donde $x_{1,2} = \pm \frac{H}{2} \sqrt{\frac{H^2}{4} - \frac{mRT}{\mu S\rho g}}$. Para que el problema tenga solución es necesario que $mRT/\mu S\rho g \leq H^2/4$; por consiguiente, $T \leq H^2\mu S\rho g/4mR$.

$$2.115. T_2/T_1 = 3(2P_0 + \rho gh)/8(P_0 + \rho gh).$$

2.116. Durante el calentamiento parte del aire se sale del tubo de ensayo. Para el resto de la masa de aire se tiene

$$P_0V_0 = mRT/\mu \quad \text{y} \quad PV = mRT_0/\mu,$$

donde V_0 y V son los volúmenes de aire que hay en el tubo de ensayo a las temperaturas T_0 y T . De estas ecuaciones se obtiene que $P = P_0V_0T_0/VT = P_0lT_0/(l - h)T$. Ahora puede escribirse la condición de equilibrio de la columna de mercurio en el tubo:

$$P_0 = P + \rho gh, \quad \text{o} \quad P_0 = P_0lT_0/(l - h)T + \rho gh.$$

De aquí

$$1 - \frac{l}{l-h} \frac{T_0}{T} = \frac{\rho g h}{P_0}, \quad \text{o} \quad T = \frac{l}{l-h} \frac{P_0}{P_0 - \rho g h} T_0.$$

Sustituyendo las magnitudes por sus valores numéricos resulta que $T = 350$ K.

2.117. Consideremos los tres estados del aire en el tubo.

1) Estado inicial:

$$P_1 = P_0 + \rho g h, \quad V_1 = hS, \quad T_1 = T_0,$$

donde S es la sección del tubo.

2) El aire se ha calentado hasta cierta temperatura T :

$$P_2 = P_0 + \rho g h_1, \quad V_2 = h_1 S, \quad T_2 = T,$$

donde h_1 es la altura de la columna de aire a la temperatura T ; parte de mercurio se ha derramado de la rama izquierda abierta.

3) El aire se ha vuelto a enfriar hasta la temperatura inicial T_0 :

$$P_3 = P_0 + \rho g (h_2 - H), \quad V_3 = h_2 S, \quad T_3 = T_0;$$

la altura de la columna de aire es $h_2 = h_1 - H$, puesto que al pasar del segundo estado al tercero no se derramó más mercurio del tubo.

En los estados primero y tercero las temperaturas del aire son iguales. Por lo tanto, puede aplicarse la ley de Boyle—Mariotte:

$$(P_0 + \rho g h) hS = [P_0 + \rho g (h_2 - H)] h_2 S.$$

La magnitud $P_0/\rho g$ tiene el sentido de altura de la columna de mercurio correspondiente a la presión atmosférica; vamos a designarla por H_0 ($H_0 = 76$ cm). Tenemos que

$$h_2^2 + (H_0 - H) h_2 - (H_0 + h) h = 0.$$

Sustituyendo H_0 , H y h por sus valores numéricos (en centímetros), hallamos que

$$h_2^2 + 70 h_2 - 2400 = 0, \quad h_2 \approx -35 \pm 60 \text{ cm}.$$

Sólo tiene sentido físico la solución positiva. Así, pues, $h_2 \approx 25$ cm y, por consiguiente, $h_1 = h_2 + H = 31$ cm. Aplicado ahora la ley unificada de los gases a los estados primero y segundo, se obtiene que $h_1 (H_0 + h_1)/T = = h (H_0 + h)/T_0$, de donde

$$T = T_0 h_1 (H_0 + h_1)/h (H_0 + h) \approx 1,38 T_0 \approx 378 \text{ K}.$$

$$2.118. V_1 = V (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2).$$

$$2.119. H_1 = H + h \rho_2/\rho_1 = 15,25 \text{ cm}.$$

$$2.120. H = (d/d')^2 h (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2.$$

2.121. El vaso se hundirá si la masa de agua que cabe en el volumen ocupado por el aire a la profundidad h es igual o menor que la masa del vaso. El volumen de aire a la profundidad h se determina por la ley de Boyle—Mariotte: $V = V_0 P_0/(P_0 + \rho g h)$, donde $V_0 = SH$. En la profundidad crítica

$$\frac{\rho P_0 V_0}{P_0 + \rho g h} = M, \quad \text{de donde} \quad h = \frac{P_0}{\rho g} \left(\frac{\rho V_0}{M} - 1 \right) = 30 \text{ m}.$$

2.122. La fuerza de gravedad de la barra debe ser mayor que la fuerza de empuje máxima posible: $mg \geq F = \rho_2 g h_2 S_2$, donde el nivel del agua en el cilindro con la barra es $h_2 = V/(S_1 - S_2)$. Se obtiene que $m \geq 667$ g. En el caso en que $S_2' = 80$ cm² se tiene que $h_2' = 50$ cm $> h_1$. El agua se derramará del recipiente, la fuerza de empuje no puede superar la magnitud $F' = \rho_2 g h_1 S_1'$. Así, $m' \geq 1600$ g.

2.123. Si las bolitas no estuvieran unidas entre sí, cada una de ellas flotaría a la profundidad en la cual la densidad del agua, en el punto en que se encon-

trara el centro de la bolita, fuera igual a la densidad de ésta. El cálculo da

$$h_{10} = (\rho_1 - \rho_0)/A = 20 \text{ cm y } h_{20} = 40 \text{ cm.}$$

Pero como la longitud del hilo es $l = 5 \text{ cm}$, el hilo se tensa. Entonces la condición de equilibrio se puede escribir en la forma

$$(m_1 + m_2)g = [(\rho_0 + Ah_1) + (\rho_0 + Ah_2)]gV,$$

siendo $h_2 - h_1 = l$. De aquí

$$h_1 = \frac{m_1 + m_2}{2AV} - \frac{\rho_0}{A} - \frac{l}{2} = 27,5 \text{ cm, } h_2 = h_1 + l = 32,5 \text{ cm.}$$

$$2.124. l = \frac{m_1 + m_2 - \rho_0(V_1 + V_2) - Ah_1(V_1 + V_2)}{AV_2} = 12,5 \text{ cm.}$$

2.125. La diferencia entre las indicaciones de las balanzas se debe a la diferencia entre las fuerzas de empuje que actúan sobre la vasija por parte del aire, es decir, a la diferencia entre las masas del aire que hay en un volumen igual a la capacidad de la vasija: $\Delta m = \frac{\mu P_0 V g}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$. De aquí, cuando $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ y $\mu = 29 \text{ g/mol}$, resulta que $V = 1,3 \text{ dm}^3$.

2.126. Cuando la pesada se hace en el vacío las masas de la lámina y de las pesas son iguales: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, donde V_1 y V_2 son los volúmenes de la lámina y de las pesas. Si la exactitud de la pesada es m_0 , la diferencia entre los resultados en la determinación de la masa de la lámina en la balanza se puede apreciar si se cumple la condición

$$(\rho_1 - \rho_a) V_1 - (\rho_2 - \rho_a) V_2 \geq m_0,$$

donde $\rho_a = \mu P_0 / RT$ es la densidad del aire. En definitiva se tiene que

$$m_0 \leq \mu P_0 V_1 (\rho_1 - \rho_2) / \rho_2 RT = 9 \cdot 10^{-7} \text{ kg} = 0,9 \text{ mg.}$$

$$2.127. M \geq \frac{m_0 (\rho_1 - \rho_a) (\rho_2 - \rho_a)}{\rho_a (\rho_2 - \rho_1)} \approx \frac{m_0 \rho_1 \rho_2 RT}{\mu P_0 (\rho_2 - \rho_1)} = 0,33 \text{ g.}$$

2.128. La presión dentro del globo es igual a la presión del aire circundante. Entonces la masa del aire desplazado por el globo es $m_1 = \mu_1 PV / RT$. Pero $V = m_2 RT / \mu_2 P$; por consiguiente, $m_1 = m_2 \mu_1 / \mu_2$. La fuerza ascensional es $F = m_1 g - m_2 g = (\mu_1 / \mu_2 - 1) m_2 g$.

2.129. 5 globos.

2.130. 1 mol de aire en condiciones normales ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $T_0 = 273 \text{ K}$) ocupa el volumen de $22,4 \text{ dm}^3$. Por lo tanto, el globo desaloja 10 kmol, o $m = 290 \text{ kg}$ de aire. La masa del globo junto con el aire contenido en él debe ser igual a m . La masa de la envoltura es $M = m/2$. Por consiguiente, el aire que hay en el globo debe tener una masa dos veces menor que la masa del aire atmosférico desalojado. Si las presiones son iguales esto se consigue en el caso en que su temperatura absoluta es dos veces más alta que la del aire circundante, es decir, igual a 546 K , o 273°C .

2.131. $F = \mu P_0 V g \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} = 5 \cdot 10^5 \text{ N}$, donde $\mu = 4 \text{ g/mol}$ es la masa molar del helio.

2.132. Las condiciones de equilibrio del aeróstato en las alturas primera y segunda se escriben en la forma

$$Mg = \rho_1 V g, \quad (M - \Delta m)g = \rho_2 V g,$$

donde M es la masa del aeróstato, ρ_1 y ρ_2 , las densidades del aire a dichas alturas, y Δm , la masa del lastre tirado. De estas relaciones se sigue que $\Delta m = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} M$. Expresando ahora las densidades ρ_1 y ρ_2 valiéndose de la ecuación del estado gaseoso, por medio de las temperaturas T_1 y T_2 y de las presiones P_1 y P_2 , se obtiene

$$\Delta m = \frac{\mu}{R} \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) V = 50 \text{ kg.}$$

2.133. La densidad del aire ($\mu_1 = 29$ g/mol) en la superficie de la Tierra es $\rho_1 = \mu_1 P_0/RT$, y a la altura $h = 1,5$ km constituye el 0,8 de esta magnitud. La densidad del helio ($\mu_2 = 4$ g/mol) es $\rho_2 = \mu_2 P_0/RT$. La condición de equilibrio tiene la forma

$$V \cdot 0,8 (\mu_1 P_0/RT) = V \mu_2 P_0/RT + M,$$

de donde $M = (0,8\mu_1 - \mu_2) P_0 V/RT = 380$ kg.

2.134. Por la ecuación del estado gaseoso se halla que

$$m_{\text{He}} = \mu_{\text{He}} P_0 V/RT_0, \quad m_{\text{a}} = \mu_{\text{a}} P_0 V/RT_0,$$

donde m_{He} y m_{a} son, respectivamente, las masas de helio y de aire que caben en el volumen del globo $V = 4\pi r^3/3$, y μ_{He} y μ_{a} , las masas molares de dichos cuerpos. Basándose en el principio de Arquímedes, la condición con la cual el globo se elevará a sí mismo se escribe en la forma

$$Mg \leq (m_{\text{a}} - m_{\text{He}}) g = (\mu_{\text{a}} - \mu_{\text{He}}) P_0 V g/RT_0,$$

donde $M = 4\pi r^2 \sigma$ es la masa de la envoltura. De aquí, $r_{\text{mín}} = 3\sigma RT_0/P_0 (\mu_{\text{a}} - \mu_{\text{He}}) = 2,7$ m.

2.135. Escribamos la condición de equilibrio del globo a la altura dada:

$$V \cdot 0,5 \mu_1 P_0/RT = V \mu_2 P_0/RT + M + 4\pi \sigma (3V/4\pi)^{2/3},$$

donde μ_1 y μ_2 son las masas molares del aire y del helio, y σ , la densidad superficial del material buscada. El cálculo da que $\sigma = 0,3$ kg/m².

$$2.136. P = P_0 \frac{T}{2T_0} \left(\frac{F}{Mg} + 1 \right) \approx 46 \text{ Torr.}$$

2.137. La condición de equilibrio del globo a la altura H de elevación máxima tiene la forma

$$Mg = \rho Vg = \mu P V g/RT,$$

donde ρ y P son la densidad y la presión del aire a la altura H y se ha aplicado la ecuación de estado de los gases. De aquí $P = MRT/\mu V$. El cálculo da $P_0 P = 16$. Por lo tanto, la presión a la altura máxima es 16 veces menor que en la superficie de la Tierra. Como cada $h = 5$ km de elevación la presión disminuye dos veces, la altura máxima a que se eleva el globo resulta ser $H = 20$ km.

Observación. Es fácil comprender que la presión variará con la altura según la ley $P = P_0 \cdot 2^{-H/h}$, donde $h = 5$ km. En nuestro caso $P/P_0 = 2^{-H/h} = (16)^{-1}$. De aquí se sigue que $H = 4h = 20$ km.

2.138. El globo cesa de elevarse a la altura en que su masa, junto con el hidrógeno que queda en él, resulta ser igual a la masa de aire exterior que cabe en el volumen V :

$$M + \mu_1 P V/RT = \mu_2 P V/RT,$$

donde $\mu_1 = 2$ g/mol y $\mu_2 = 29$ g/mol son, respectivamente, las masas molares del hidrógeno y del aire, y P , la presión a la altura máxima H . Las expresiones $\mu_1 P/RT$ y $\mu_2 P/RT$ tienen el sentido de las densidades del hidrógeno y del aire. De aquí, $P = MRT/(\mu_2 - \mu_1) V$. La sustitución por los valores numéricos da que $P_0/P = 16$, de donde se sigue que la altura máxima a que se eleva el globo es $H = 20$ km (véase la solución del problema 2.137).

Ley de conservación de la energía en los procesos térmicos

2.139. Al emerger la pelotita, sobre ella actúa la diferencia entre la fuerza de Arquímedes y la fuerza de gravedad. Su trabajo es $A = (4\pi r^3 \rho g/3 - mg) h$. La energía de la pelotita salida del agua es $E = mgh_1$. Esta energía es menor que el trabajo realizado sobre la pelotita por las fuerzas de Arquímedes y de la

gravidad en la magnitud del trabajo de las fuerzas de rozamiento, que se transforma en calor. De aquí $Q = A - E = 2,2 \cdot 10^{-2}$ J.

2.140. Aprovechando la solución del problema 2.93 se puede determinar la fuerza que actúa sobre el tabique en una posición arbitraria. Como no es difícil demostrar, la fuerza depende no linealmente del desplazamiento del tabique. Por eso el trabajo no será igual al producto de la semisuma de las fuerzas máxima y mínima por el desplazamiento. El cálculo consecuente del trabajo como integral de la fuerza por el desplazamiento no es fácil matemáticamente. Sin embargo, el problema se resuelve con facilidad por otro camino, empleando la ley de conservación de la energía.

Se calcula la energía potencial del agua en el estado inicial y en el final. Al principio el centro de masas del agua se encuentra a la altura $h/2$. Su energía potencial es

$$U_0 = \rho S h g \cdot h/2 = \rho g S h^2/2.$$

Después del desplazamiento del tabique la mitad del agua ocupa la cuarta parte del estanque. La altura del centro de masas del agua es h . Su energía potencial es

$$U_1 = (\rho S h/2) g h = \rho g S h^2/2.$$

La otra mitad del agua se extendió por la superficie, aumentada 1,5 veces. La energía potencial de esta parte del agua es

$$U_2 = (\rho S h/2) g h/3 = \rho g S h^2/6.$$

Por la ley de conservación de la energía se halla el trabajo realizado:

$$A = U_1 + U_2 - U_0 = \rho g S h^2/6 = 2 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

2.141. Supongamos que el nivel del líquido en el segundo recipiente descendió (y en el primero ascendió) en la magnitud x . Escribamos la condición de equilibrio: $\rho_2(h-x) = \rho_2 x + \rho_1 h$. De aquí $x = h/4$. La cantidad de calor desprendida es igual a la disminución de la energía potencial del sistema:

$$Q = U_0 - U = \rho_1 g S h^2/8 = 1,25 \text{ J.}$$

2.142. Supongamos que el nivel del agua en el cilindro de la derecha desciende en la magnitud x ; entonces en el cilindro de la izquierda asciende en la magnitud $y = x S_2/S_1$. Escribamos la condición de equilibrio:

$$(y + x) \rho g = mg/S_2, \text{ de donde } x = S_1 m / S_2 \rho (S_1 + S_2).$$

La disminución de la energía de la pesa será

$$\Delta U = mgx = S_1 m^2 g / S_2 \rho (S_1 + S_2).$$

El aumento de la energía del agua es

$$\Delta U_a = \rho g x S_2 (y + x)/2 = mgx/2.$$

La cantidad de calor desprendida es igual a la disminución de la energía potencial del sistema: $Q = \Delta U - \Delta U_a = mgx/2 - S_1 m^2 g / 2 \rho S_2 (S_1 + S_2) = 0,08 \text{ J.}$

2.143. Hallando la posición de equilibrio del pontón se puede calcular la disminución de su energía potencial y el incremento de la energía potencial del agua desalojada. Al hacer esto, teniendo en cuenta las grandes dimensiones del estanque, se supone que el agua desalojada se extiende por su superficie formando una capa cuyo espesor es despreciable, por lo que la posición de su centro de masas coincide con la posición de la superficie del agua del estanque. Como valor de la variación de la energía potencial y, por consiguiente, de la cantidad de calor desprendida, se obtiene $\Delta U = Q = 3 m g h / 8 = 2800 \text{ J.}$

$$2.144. Q = m g h / 4 = 5000 \text{ J.}$$

2.145. La diferencia entre la fuerza de Arquímedes y la de gravedad que tiene que vencer la fuerza exterior F , varía al principio según una ley lineal y luego, una vez que el taco se sumerge por completo, permanece constante

(fig. 2.53). Para esta dependencia de la fuerza respecto de la traslación no es difícil calcular el trabajo.

$$A = (p_0 - p) g L N_1 \frac{L}{4} \cdot \frac{3}{2}.$$

La misma respuesta puede obtenerse por la ley de conservación de la energía, como se hizo, por ejemplo, al resolver el problema 2.142.

2.146. La cantidad de calor Q que se desprende durante el choque es igual a la disminución de la energía cinética de la bala. Esta cantidad de calor se gasta en calentar la bala hasta la temperatura de fusión y en fundir parte de la misma:

$$Q = m_0 (v_0^2 - v^2)/2 = m_0 c (T - T_0) + \lambda m,$$

donde m_0 es la masa de la bala y m , la masa de la parte de ésta que se funde. De aquí

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{v_0^2 - v^2}{2} - c (T - T_0) \right] = 0.015.$$

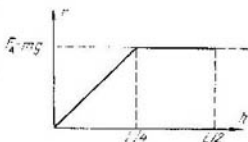


Fig. 2.53.

2.147. Si durante el tiempo τ la masa m de agua se calienta desde la temperatura T_1 hasta la temperatura T_2 , siendo c el calor específico, esto requiere el suministro de la potencia $N = mc(T_2 - T_1)/\tau$. Con este mismo suministro de potencia se necesitará para la vaporización total del agua el tiempo

$$\tau' = mq/N = q\tau/c(T_2 - T_1) = 60 \text{ min.}$$

donde $q = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ es el calor de vaporización del agua, y $c = 4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, su calor específico.

2.148. La variación del nivel del agua se debe a que el volumen de ésta depende de la temperatura. Si no se tiene en cuenta la dilatación, el nivel del agua no varía, ya que el hielo desplaza exactamente el mismo volumen de agua que él ocupa cuando se funde.

Para hallar la variación del volumen del agua se plantea la ecuación del balance térmico:

$$\lambda m + mc(T - T_0) = Mc(T_1 - T),$$

en la que M es la masa de agua que hay en el calorímetro y c , el calor específico del agua. De esta ecuación se deduce la temperatura estacionaria T :

$$T = \frac{MT_1 + mT_0 - m\lambda/c}{m + M}.$$

Llamando V_0 al volumen del agua y el hielo, cuya masa es $m + M$ a la temperatura T_1 , hallamos la variación del volumen y la correspondiente variación del nivel del agua por la ecuación $\Delta V = V_0 \beta (T - T_1)$:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{V_0 \beta}{S} \left(\frac{MT_1 + mT_0 - m\lambda/c}{m + M} - T_1 \right) = -0.95 \text{ mm.}$$

Así, pues, el nivel del agua en el calorímetro desciende en la magnitud $\Delta h = 0.95 \text{ mm}$.

2.149. El émbolo se moverá cuando la fuerza de la presión del nitrógeno sobre él equilibre la fuerza de gravedad del émbolo, la fuerza de la presión exterior y la fuerza de rozamiento F : $P_1 S = Mg + P_0 S + F$. La elevación de la temperatura del gas en nuestro caso es $\Delta T = Q/mc_V$. Por la ecuación del estado gaseoso tenemos que, a volumen constante,

$$P_1 = PT_1/T = P(1 + \Delta T/T) = P(1 + Q/mc_V T).$$

Por consiguiente

$$F = (P_1 - P_0) S - Mg = [P (1 + Q/mc_V T) - P_0] S - Mg.$$

2.150. Por las condiciones del problema está claro que las cantidades de calor que se lleva el agua que pasa por el serpentín son iguales en los dos casos que se consideran. La masa del agua que pasa es proporcional a la velocidad; por lo tanto, puede escribirse que $v_1 (T_1 - T_0) = v_2 (T_2 - T_0)$; de donde $T_2 = T_0 + (T_1 - T_0) v_1/v_2$.

2.151. La masa de agua que se vaporiza por unidad de tiempo es $m_T = N/q$, donde $q = 2,26 \cdot 10^6$ J/kg es el calor de vaporización del agua. El volumen del vapor que se forma por unidad de tiempo se halla por la ecuación del estado gaseoso: $V_T = m_T RT/p = NRT/quP$, donde $P = 10^5$ Pa es la presión del vapor a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ ($T = 373$ K es la temperatura absoluta de ebullición del agua). Por otra parte, este volumen es igual al producto de la velocidad v de salida del vapor, por el área de la sección S del pitirro. Así, pues, $v = NRT/quPS = 7,5$ m/s.

2.152. Como la temperatura de la plancha en régimen estacionario es prácticamente constante, la cantidad de calor que recibe la plancha en el tiempo τ es cedida por ella en el tiempo $\tau + T$. La cantidad de calor cedida al medio circundante es proporcional a la diferencia de temperatura entre la plancha y el medio. Comparando los dos regímenes tenemos que $(\tau + T_1) (t_1 - t_0) = (\tau + T_2) (t_2 - t_0)$. De aquí

$$t_2 = t_0 + \frac{\tau + T_1}{\tau + T_2} (t_1 - t_0) = 208,5^\circ\text{C}.$$

$$2.153. T_2 = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \frac{\tau_2}{\tau_1} (\tau_1 + T_1) - \tau_2 = 3,8 \text{ min.}$$

2.154. Por la ecuación del estado gaseoso tenemos que en el depósito había $\nu = 0,4$ mol o $m = 11,6$ g de aire. La masa de la gasolina es mucho menor que la masa del aire; por eso puede considerarse que después de la reacción en el depósito hay prácticamente aire puro. De la ecuación del balance térmico tenemos que $qm_0 = C_V (T_1 - T_0)$, donde T_1 es la temperatura al final de la reacción. La presión se halla por la ecuación del estado gaseoso: $P = P_0 T_1/T_0 = 2,7 \cdot 10^5$ Pa.

2.155. El calor que se suministra se invierte en aumentar la energía interna del gas: $Q = \nu C_V (T_1 - T)$. En el recipiente se establece la temperatura $T_1 = T (1 + Q/\nu C_V T)$. Por la ley de Charles se halla la presión buscada: $P_1 = P (1 + Q/\nu C_V T)$. La cantidad de gas es fácil de hallar por la ecuación del estado gaseoso: $\nu = PV/RT$. En definitiva tenemos $P_1 = P (1 + QR/C_V PV) = 2 \cdot 10^5$ Pa.

$$2.156. Q = 2PV C_V/R = 5470 \text{ J.}$$

2.157. La presión del gas debajo del émbolo es constante e igual a $P = P_0 + Mg/S$. El trabajo del gas en levantar el émbolo es $A = F (h_2 - h_1) = PS (h_2 - h_1) = P (V_2 - V_1)$. Expresando la variación del volumen $\Delta V = V_2 - V_1$ por medio de la variación de la temperatura del gas (a presión constante), hallamos, valiéndonos de la ecuación del estado gaseoso, que $\Delta V = V_2 - V_1 = A/P = 16,7 \text{ dm}^3$ y $A = mR (T_2 - T_1)/\mu = 1715 \text{ J}$. Llamamos la atención sobre el hecho de que en la expresión del trabajo no figuran los parámetros de estado P y V .

Cuando el calentamiento se efectúa a volumen constante, todo el calor se emplea en aumentar la energía interna del gas. Por eso el coeficiente de proporcionalidad entre la temperatura y la energía interna tiene el sentido de capacidad calorífica a volumen constante: $\Delta U = C_V \Delta T$. A presión constante, 1 mol de gas perfecto al ser calentado en la magnitud ΔT , realiza, como acabamos de aclarar, el trabajo $R \Delta T$. Por lo tanto, para el gas perfecto la capacidad calorífica molar a presión constante es mayor que C_V en la magnitud R :

$$C_P = C_V + R.$$

2.158. El trabajo del gas $A = P(V_2 - V_1)$. Pero $P(V_2 - V_1) = mR(T_2 - T_1)/\mu$. El calor gastado es $Q = mc_p(T_2 - T_1)$, de donde $m(T_2 - T_1) = Q/c_p$. Así, $A = QR/\mu c_p = 1,37 \cdot 10^3$ J. Si se aprovecha la solución del problema anterior, la última relación puede escribirse inmediatamente.

2.159. El trabajo del gas $A = P(V_1 - V_2)$. De aquí, $V_2 = V_1 - A/P$, y $T_2/T_1 = V_2/V_1$; por consiguiente,

$$T_2 = T_1 V_2/V_1 = T_1 - AT_1/PV_1 \quad \text{y} \quad \Delta T = T_2 - T_1 = -AT_1/PV_1.$$

Sustituyendo las magnitudes por sus valores numéricos hallamos que $\Delta T = -9,5$ K.

2.160. Utilizando la solución del problema 2.156 se halla $m = \mu A/R(T_2 - T_1)$. El cálculo da $m = 0,23$ g.

2.161. $Q = m(C_V + R)(T_2 - T_1)/\mu = 109$ J, donde $\mu = 28$ g/mol es la masa molar del nitrógeno.

2.162. Como el proceso se desarrolla a presión constante, se puede escribir

$$Q = \nu C_P(T_1 - T_0) = \nu(C_V + R)T_0(V_1/V_0 - 1),$$

donde $C_V = 21$ J/(mol·K) es la capacidad calorífica molar del aire a volumen constante. El cálculo da que $V_1/V_0 = 4$.

2.163. $T_0 = 286$ K.

2.164. La temperatura estacionaria se determina por la ecuación del balance térmico: $t = (m_1 t_1 + m_2 t_2)/(m_1 + m_2) = 17^\circ\text{C}$. Ahora se puede determinar la presión en cada parte del recipiente:

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu} \frac{2RT}{V} = 8,5 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad \text{y} \quad P_2 = 1,27 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2.165. Teniendo en cuenta la igualdad de las presiones, se escribe la relación de las cantidades de gas que hay en los recipientes: $\nu_1/\nu_2 = V_1 T_2/V_2 T_1$. La ecuación del balance térmico puede escribirse ahora así: $\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 = (\nu_1 + \nu_2)T$. Resolviendo este sistema se halla $T_2 = 525$ K.

2.166. De la relación $\nu_0/(\nu_0 + \nu) = P_0/P$ se obtiene que la cantidad ν de nitrógeno inyectado constituye 1/2 de la cantidad inicial ν_0 de nitrógeno que había en el recipiente. Despreciando el intercambio calorífico durante la vaporización del nitrógeno líquido, se escribe la ecuación del balance térmico en el instante final de la vaporización:

$$\nu C_V(t_0 - t_2) = \nu q/2 + \nu(t_2 - t_1)/2.$$

De aquí se obtiene $q = 5500$ J/mol.

2.167. Por la ecuación del balance térmico (véase la solución del problema 2.166) se obtiene la temperatura inmediatamente después de la vaporización del nitrógeno líquido:

$$t_2 = \frac{C_V t_0 + 0,3 C_V t_1 - 0,3 q}{1,3 C_V} = -91^\circ\text{C}.$$

De donde $P_2 = PT_2/T_0 = 8,1 \cdot 10^4$ Pa.

2.168. De la ecuación del proceso se sigue que la relación del volumen a la temperatura es una magnitud constante. Pero en este caso la presión también será constante durante todo el proceso y el trabajo puede escribirse en la forma

$$A = P(V_2 - V_1) = P_2 V_1(T_2/T_1 - 1) = 100 \text{ J}.$$

2.169. La razón de la presión al volumen en el proceso que se considera es constante: $P/V = P_0/V_0$. Combinando la proporción obtenida con la ecuación del estado gaseoso para un mol $PV = RT$, se obtiene $T = P_0 V^2/RV_0$. El trabajo es igual al área rayada que hay debajo de la recta representativa del proceso en el diagrama PV (fig. 2.54): $A = 3P_0 V_0/2$.

2.170. La temperatura y, por consiguiente, la energía interna del gas, crecen (véase la solución del problema 2.169). Además, el gas, al expandirse,

realiza trabajo. Por lo tanto, para realizar este proceso hay que suministrar calor. La variación de la energía interna del gas es $\Delta U = 5R \Delta T/2$. Calculemos el trabajo. Eliminando P de la ecuación del proceso y de la ecuación de estado, se obtiene la relación entre T y V : $RT = \alpha V^2$. Escribamos esta misma relación para el estado final: $R(T + \Delta T) = \alpha(V + \Delta V)^2$. Restando de la segunda igualdad la primera y despreciando el término en que figura el cuadrado de la pequeña magnitud ΔV , se obtiene que $\Delta V = R \Delta T/2\alpha V$. Entonces para el trabajo se tiene

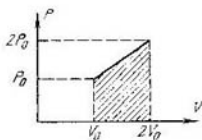


Fig. 2.54.

$A = P \Delta V = \alpha V \Delta V = R \Delta T/2$. La suma de la variación de la energía interna y del trabajo es el calor suministrado: $Q = \Delta U + A = 3R \Delta T$.

2.171. Aplicando la ecuación del estado gaseoso obtenemos $P = mR\alpha V/\mu$. Para el trabajo buscado (véase la solución del problema 2.169) hallamos $A = mR\alpha(V_2^2 - V_1^2)/2\mu$.

2.172. $A = mR(T_2 - T_1)/2\mu$.

2.173. El trabajo en la isobara es $A = P(V_2 - V_1) = RT(V_2/V_1 - 1)$. Como $T_1 = T_2 = T$, $P_1 = P_2 = P$ y $V_1 = V_2$, se puede escribir

que $P_1 V_1 = P_2 V_2$, $V_2/V_1 = P_1/P_2 = k$. En definitiva se tiene $T = A/R(k - 1)$.

2.174. El trabajo en la isobara es $A = P_2(V_3 - V_2) = P_2 V_2(1 - V_2/V_3) = RT(1 - V_2/V_3)$. De un modo análogo a como se hizo en el problema anterior, se obtiene que $P_1/P_2 = V_3/V_2 = RT/(RT - A)$.

2.175. $Q = C_P(2T_0 - T_0) + C_V(4T_0 - 2T_0) = 3CVT_0 + RT_0 = 20 \text{ kJ}$.

2.176. $t_3 = t_1 + Q/(C_V + R) = Q/(C_V + R) = 17.2^\circ \text{C}$.

2.177. El trabajo realizado sobre el gas es igual al área de la superficie que hay debajo de la gráfica del proceso en el diagrama PV . Como la presión no debe descender más abajo que la inicial, todo el trabajo debe realizarse a la presión inicial, es decir, por la isobara siguiendo la cual el gas alcanza el volumen final y después, por la isocora, hay que transformarlo a su estado final. El cálculo da que

$$Q = -C_P(T - T/2) + C_V(3T - T/2).$$

Teniendo en cuenta que a molécula del gas monoatómico tiene tres grados de libertad (traslación), es decir, su energía referida a un mol es igual a $3RT/2$, se obtiene $Q = 5RT_0/2 = 6225 \text{ J}$.

2.178. La molécula del gas biatómico tiene cinco grados de libertad, tres de traslación y dos de rotación. Como la energía correspondiente a un grado de libertad, referida a un mol, es igual a $RT/2$, para el mol de gas biatómico la capacidad calorífica a volumen constante es $C_V = 5R/2$. Teniendo esto en cuenta resulta que

$$Q = C_P(2T - T) + C_V(T/3 - 2T) = -2RT/3 = -1690 \text{ J}$$

Por lo tanto, en este proceso la cantidad de calor que se extrae del gas es $Q = 1690 \text{ J}$.

2.179. El trabajo se realiza en el tramo 1-2 y en el tramo 3-4. Como en estos tramos la presión es constante,

$$A_{12} = P_1(V_2 - V_1) \text{ y } A_{31} = P_2(V_1 - V_2).$$

Por la ecuación del estado gaseoso se tiene que

$$P_1 V_2 = RT_2, \quad P_1 V_1 = RT_1 \text{ y } P_2 V_2 = RT_3.$$

Combinando estas igualdades se halla que $P_2 V_1 = RT_1 T_3/T_2$. El trabajo total realizado durante el ciclo es

$$A = A_{12} + A_{31} = -R(T_3 - T_2)(1 - T_1/T_2).$$

El signo menos significa que en el tramo 3-4 se realiza más trabajo sobre el gas que el trabajo realizado por el gas en el tramo 1-2.

2.180. El trabajo que realiza el gas durante el ciclo (fig. 2.34), es igual al área de la superficie que hay debajo de la gráfica del proceso en el diagrama PV :

$$A = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1) = P_1V_1 + P_2V_2 - (P_1V_2 + P_2V_1).$$

De las ecuaciones del estado del gas en los puntos 1, 2, 3 y 4 se obtiene que

$$P_1V_1 = RT_1, \quad P_2V_1 = RT, \quad P_2V_2 = RT_3 \quad \text{y} \quad P_1V_2 = RT,$$

donde T es la temperatura desconocida del gas en los estados 2 y 4. Dividiendo miembro a miembro la primera igualdad por la segunda y la tercera por la cuarta, se obtienen, para las isócoras 1-2 y 3-4, las relaciones

$$P_1/P_2 = T_1/T, \quad P_2/P_1 = T_3/T, \quad \text{de donde} \quad T = \sqrt{T_1T_3}.$$

Ahora, para el trabajo realizado por el gas durante el ciclo se obtiene

$$A = R(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3}) = R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2.$$

2.181. Designemos la temperatura en el estado 1 (P_0, V_0) por T_0 (fig. 2.35). Entonces las temperaturas de los otros estados son $T_2 = 2T_0$, $T_3 = 6T_0$ y $T_4 = 3T_0$. En el primer ciclo (1-2-3-1) el gas recibe calor en la isócora 1-2 y en la isobara 2-3. La cantidad total de calor recibida por el mol de gas monoatómico ($C_V = 3R/2$), es

$$Q_1 = C_V T_0 + C_P \cdot 4T_0 = 23RT_0/2.$$

El trabajo es igual al área del triángulo 1-2-3:

$$A = (P_0/2) \cdot 2V_0 = P_0V_0 = RT_0.$$

El rendimiento del ciclo es igual a la razón del trabajo realizado durante el ciclo a la cantidad total de calor recibido del calentador (foco caliente): $\eta_1 = A/Q_1 = 2/23$.

Del análisis del primer ciclo se puede deducir la cantidad de calor cedida al foco frío en el tramo 3-1: $Q_{31} = Q_1 - A = 21RT_0/2$. Pero en el segundo ciclo (1-3-4-1) el gas recibe calor en este mismo tramo al recorrerlo en sentido contrario. En los tramos 3-4 y 4-1 el gas cede calor; por consiguiente, en el segundo ciclo el gas sólo recibe del foco caliente la cantidad de calor $Q_2 = Q_{13} = 21RT_0/2$. El trabajo realizado durante el segundo ciclo, lo mismo que el realizado en el primero, es igual a RT_0 . Así, el rendimiento del segundo ciclo es $\eta_2 = A/Q_2 = 2/21$.

La relación entre los rendimientos de los ciclos es $\eta_2/\eta_1 = 23/21$.

2.182. Sea S la sección del cilindro. Entonces el desplazamiento del émbolo $h = (V_1 - V_2)/S$, donde V_1 y V_2 son los volúmenes inicial y final del gas. La variación de la energía potencial del émbolo se invierte en aumentar la energía interna del gas:

$$Mg(V_1 - V_2)S = \nu C_V(T_2 - T_1),$$

donde M es la masa del émbolo; ν , la cantidad de gas; C_V , la capacidad calorífica molar, y T_1 y T_2 , las temperaturas inicial y final del gas. Teniendo en cuenta que la presión final es $P_2 = Mg/S$ y aplicando la ecuación del estado gaseoso, se obtiene

$$\nu C_V(T_2 - T_1) = P_2(V_1 - V_2) = \nu RT_2(V_1/V_2 - 1).$$

El cálculo da $T_2/T_1 = 5/3$.

2.183. Supongamos que el gas que al final del proceso hay en el recipiente, ocupaba al principio el volumen V a la presión P . Entonces, al hacerlo entrar en el recipiente, el gas circundante realiza el trabajo $A = PV = mRT_0/\mu$. Este trabajo se invierte en elevar la energía interna del gas:

$$mRT_0/\mu = mC_V(T - T_0)/\mu.$$

Para el gas monoatómico $C_V = 3R/2$; por consiguiente, $T = 5T_0/3$.

2.184. Demostremos que en este proceso la capacidad calorífica del gas es igual a la capacidad calorífica a presión constante C_p . Supongamos que antes de pasar por el calentador la presión y la temperatura del aire son P_1 y T_1 y después de pasar por él, P_2 y T_2 . La variación de la energía interna de un mol de aire será $\Delta U = C_V (T_2 - T_1)$. La siguiente porción de gas, al desplazar el mol de gas a la presión P_1 , realiza sobre él el trabajo $A_1 = P_1 V_1 = RT_1$, donde V_1 es el volumen molar del aire antes de pasar por el calentador. El gas realiza el trabajo a la presión P_2 : $A_2 = P_2 V_2 = RT_2$, siendo V_2 el volumen molar del aire después de pasar por el calentador. El trabajo total realizado por el gas es

$$A = A_2 - A_1 = R (T_2 - T_1) = R \Delta T.$$

Por la primera ley de la termodinámica la cantidad de calor suministrada al gas es

$$Q = \Delta U + A = (C_V + R) \Delta T.$$

Ahora no es difícil calcular la potencia del calentador:

$$N = (C_V + R) m_T \Delta T / \mu = C_{p,m} \Delta T / \mu = 10^3 \text{ W},$$

donde $C_p = 29.3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ es la capacidad calorífica molar del aire a presión constante.

2.185. Al trasladarse de la región en que la presión es P_1 a la región en que la presión es P_2 , el aire realiza trabajo contra la fuerza de la presión exterior (véase la solución del problema 2.184):

$$A_1 = P_2 V_2 - P_1 V_1 = R (T_2 - T_1) = R \Delta T.$$

Además, el aire que se eleva realiza trabajo contra la fuerza de gravedad: $A_2 = \mu gh$, donde $\mu = 29 \text{ g/mol}$ es la masa molar del aire, y $h = 100$. Como no existe intercambio calorífico, todo el trabajo se realiza a expensas de la disminución de la energía interna:

$$C_V (T_1 - T_2) = R (T_2 - T_1) + \mu gh,$$

de donde $\Delta T = \mu gh / (C_V + R) = \mu gh / C_p \approx 1 \text{ K}$.

Vapores saturados y no saturados

2.186. $\rho = \mu P / RT = 0.012 \text{ g/m}^3$.

2.187. La masa de agua condensada es $m = \rho \pi r^2 l / 4$, donde $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del agua. Esta agua se encontraba antes en forma de vapor de agua saturado en el volumen $V = H \pi l^2 / 4$. Por la ecuación del estado gaseoso hallamos

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{\rho}{\mu} \frac{h}{H} \left(\frac{d}{D} \right)^2 RT = 2.13 \cdot 10^3 \text{ Pa}.$$

2.188. La masa de vapor que hay en el tubo a la temperatura $t_1 = 150^\circ \text{C}$ es $m_1 = \mu P_1 V / RT_1 = 16.4 \text{ mg}$. La masa de vapor saturado a la temperatura $t_2 = 22^\circ \text{C}$ es $m_2 = \mu P_2 V / RT_2 = 7.5 \text{ mg}$. Por lo tanto, se condensan $m = 8.9 \text{ mg}$ de agua.

2.189. $\Delta m / m = \mu P V / m R T = 0.17$.

2.190. La temperatura $T = 373 \text{ K}$ es el punto de ebullición del agua a presión normal. La ebullición comienza cuando la tensión del vapor saturado se hace igual a la presión atmosférica ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$). Teniendo esto en cuenta resulta que $m = \mu P_0 V / RT = 5.9 \text{ g}$.

2.191. $\Delta m = m - \mu P V / 2 R T = 0.64 \text{ g}$.

2.192. Sobre el agua hirviendo se encuentra su vapor saturado, cuya tensión es igual a la presión atmosférica ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$). Por eso todo el aire ha sido desplazado por el vapor de agua. Después del enfriamiento, debajo del tapón existe

prácticamente un vacío (mejor dicho, vapor saturado a la temperatura ambiente; su tensión es pequeña en comparación con P_0). La diferencia de presión que actúa sobre el tapón es, aproximadamente, igual a P_0 , de donde $F = P_0 \pi D^2/4 = 70.7$ N.

2.193. El émbolo estará en equilibrio cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre él sea nula: $PS = P_0S + Mg$; por consiguiente, $P = P_0 + Mg/S = 2 \cdot 10^5$ Pa. A la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$ la tensión del vapor saturado es menor que P ; por eso toda el agua está condensada. A la temperatura $t = 200^\circ\text{C}$ la tensión del vapor saturado es mayor que P , por eso toda el agua se vaporiza y el vapor se expande hasta que su tensión se hace igual a P . Su volumen en estas condiciones es $V = mRT/\mu PS$. La altura a que se eleva el émbolo es $h = V/S = mRT/\mu PS = 1.9$ m.

2.194. $h = \Delta h (t_0 - t)/\Delta t = 5.6$ km, donde $t_0 = 100^\circ\text{C}$.

2.195. A la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ el vapor de agua saturado tiene la tensión $P_0 = 10^5$ Pa. 1 mol de gas a esta presión y a la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$ ocupa el volumen $V_0 = 22.4$ dm³/mol, y a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ un volumen aún mayor. La capacidad de todo el recipiente, por la condición del problema, es $V = 20$ dm³; por consiguiente, el agua no puede vaporizarse. Además del agua que queda, en la parte izquierda del recipiente habrá también vapor saturado; la presión resultará ser igual a P_0 . Esta misma será la presión del nitrógeno. El volumen ocupado por el nitrógeno será $V_n = \nu_n RT/P_0 = 15.3$ dm³.

2.196. Supongamos que toda el agua se vaporiza. Las tensiones y las temperaturas del vapor de agua y del nitrógeno deben ser iguales; por consiguiente, éstos ocuparán volúmenes proporcionales a la cantidad ν de sustancia. Al nitrógeno le corresponde el volumen $V_n = 40$ dm³. Hay que cerciorarse de que el vapor de agua no es saturado. El volumen $V_a = 80$ dm³ lo ocupan $\nu_a = 2$ mol de vapor de agua. La presión $P = \nu_a RT/V = 7.65 \cdot 10^4$ Pa $< 10^5$ Pa. El vapor no es saturado, nuestra suposición fue acertada.

2.197. La tensión máxima que puede tener el vapor de agua a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ es $P_0 = 10^5$ Pa. En equilibrio, el nitrógeno debe tener esta misma presión. Su volumen $V_n = \nu_n RT/\mu_n P_0 = 2.18$ dm³. Este volumen es mayor que la capacidad total del recipiente. Por lo tanto, el agua se condensa y el nitrógeno ocupa todo el volumen (excepto la parte ocupada por el líquido).

2.198. La presión del aire en el recipiente a la temperatura $t_1 = 76^\circ\text{C}$ es $P_1 = P_0 - P = 6 \cdot 10^4$ Pa. A la temperatura $T_2 = 80$ K la presión total es igual a la presión del aire: $P_2 = P_1 T_2/T_1 = 13.7$ kPa.

2.199. Como cuando el cilindro está en posición vertical hay en el agua, el vapor de agua es saturado y su tensión es $P_0 = 10^5$ Pa. El exceso de presión que crea el émbolo, $\Delta P = Mg/S = 2.45 \cdot 10^3$ Pa, es equilibrado por la presión del aire que hay debajo del émbolo. Cuando el cilindro está en posición horizontal, el émbolo es equilibrado por la presión total que existe en el cilindro, igual a la atmosférica. Como en el cilindro hay aire, la tensión del vapor de agua será menor que la atmosférica y toda el agua se vaporizará. La presión del aire es pequeña en comparación con la atmosférica, por eso, aproximadamente, la tensión del vapor de agua en el segundo caso también es prácticamente igual a P_0 y, por consiguiente, la masa de agua vaporizada es aproximadamente igual a la masa del vapor saturado a la temperatura $T = 373$ K que hay en el volumen $S \Delta h$: $m = \mu P_0 S \Delta h/RT = 0.7$ g.

Un cálculo más exacto requiere tomar en consideración la variación de la presión del aire: $\Delta P' = \Delta Ph/(h + \Delta h) = 2.13 \cdot 10^3$ Pa. En este caso para la presión atmosférica debe tomarse una cifra más exacta: $P_0 = 1.0133 \cdot 10^5$ Pa. La masa del agua vaporizada se calcula entonces como la diferencia de las masas (a la temperatura $T = 373$ K) tomadas en el volumen $S(h + \Delta h)$ a la presión $P_0 - \Delta P'$ y en el volumen $S h$ a la presión P_0 :

$$\Delta m = \frac{\mu S}{RT} (P_0 \Delta h - \Delta P' h - \Delta P' \Delta h) = 0.59 \text{ g.}$$

2.200. La presión del aire húmedo que hay en el recipiente se compone de las presiones del aire y del vapor: $P = P_a + P_v$, $P_a = P_0 T/T_0 = 1.37 \cdot 10^5$ Pa.

Considerando el vapor como gas perfecto y suponiendo que toda el agua se vaporiza, hallamos $P_v = mRT/\mu V = 5,1 \cdot 10^4$ Pa. Como la tensión del vapor saturado a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ es $P_0 = 10^5$ Pa, el vapor no es saturado y, por consiguiente, nuestra suposición fue acertada. Así, pues, $P = 1,88 \cdot 10^5$ Pa.

2.201. Supongamos que todo el hielo seco se vaporiza. Entonces $P = mRT/\mu V = 2,7 \cdot 10^4$ Pa. Esta presión es menor que la del vapor saturado; por lo tanto, nuestra suposición fue acertada. La presión en la cámara es $P_c = 1,27 \cdot 10^5$ Pa.

2.202. La válvula se abre cuando la diferencia de presión dentro y fuera del recipiente crea una fuerza igual a la de elasticidad del muelle de la válvula: $(P_a + P_s - P_0) S = F$, donde P_a es la presión del aire y P_s , la tensión del vapor de agua saturado a la temperatura T . Por la ley de Charles $P_a = P_{a0} T/T_0$, donde $P_{a0} = 90,4$ kPa es la presión del aire a la temperatura T_0 (de $P_0 = 100$ kPa de presión total, $P_{s0} = 3,6$ kPa da el vapor de agua saturado). De estas relaciones obtenemos $P_s = F/S + P_0 - P_{a0} T/T_0 = 8,3 \cdot 10^4$ Pa.

2.203. La presión del aire P_a a la temperatura buscada se puede calcular por la ley de Charles: $P_a = P_0 T/T_0$, y la presión del vapor de agua no saturado P_n , por la ecuación del estado gaseoso: $P_n = mRT/\mu V$. Escribimos la condición de apertura de la válvula: $(P_a + P_n - P_0) S = F$. Por lo tanto,

$$T = \frac{F/S + P_0}{P_0/T_0 + mR/\mu V} = 385 \text{ K}.$$

2.204. La presión del vapor de agua en el recipiente es $P_1 = 0,6 \cdot 3 = 1,8$ kPa. Hay que crear la presión adicional $P_2 = 1,2$ kPa. La masa de agua que crea esta presión se halla por la ecuación del estado gaseoso: $m = \mu P_2 V/RT = 6,2$ g.

2.205. La masa inicial de vapor de agua en el recipiente es $m_1 = \mu P_1 V/RT = 0,9$ g, donde $P_1 = \alpha_1 P$. Si se introduce $m = 1$ g más de agua, la masa se hará igual a $m_2 = 1,9$ g y la presión será $P_2 = m_2 RT/\mu V = 2,67$ kPa. La humedad relativa $\alpha_2 = P_2/P = 0,63$, es decir, el 63%.

2.206. A temperatura constante, la presión del vapor es proporcional a la densidad. Por eso la humedad relativa $\alpha = P/P_s = \rho/\rho_s$. La densidad del vapor será igual a la suma de las densidades que crea el vapor de los volúmenes V_1 y V_2 : $\rho = \rho_1 + \rho_2 = (\alpha_1/3 + 2\alpha_2/3) = 0,27\rho_s$. La humedad relativa es $\alpha = 27\%$.

2.207. La presión total en la habitación no varía al elevar la temperatura; por consiguiente, $P_{a1} + P_{v1} = P_{a2} + P_{v2}$. Como de la habitación salieron partes iguales de aire y de vapor, se puede escribir que $P_{a1}/P_{v1} = P_{a2}/P_{v2}$. De aquí se sigue que al elevarse la temperatura cada una de las presiones P_a y P_v permanecieron invariables. Por lo tanto,

$$P_{v1} = \alpha_1 P_1 = P_{v2} = \alpha_2 P_2 \text{ y } \alpha_2 = \alpha_1 P_1/P_2 = 0,36.$$

2.208. La tensión del vapor de agua cuando la humedad $\alpha = 70\%$ era $P_{v1} = \alpha P = 1,63$ kPa; por consiguiente, la presión del aire era $P_{a1} = 11,62$ kPa. En la compresión isotérmica la presión del aire aumenta 10 veces: $P_{a2} = 116,2$ kPa. El vapor, al disminuir el volumen, se hace saturado y parte del agua se condensa. La presión total en el cilindro después de la compresión es $P_2 = 118,6$ kPa. La disminución del volumen debida a la condensación del agua puede no tenerse en cuenta, ya que el volumen total es $V_2 = 1 \text{ dm}^3$ mientras que el volumen del agua condensada, incluso si la condensación es total, sólo es $V_a = m/\rho = \mu P V_2/\rho R T = 0,11 \text{ cm}^3$.

2.209. La tensión del vapor de agua, hasta el comienzo de su condensación, variaría proporcionalmente a la presión total. Por eso, en el estado final, en que empezó la condensación, su presión era 60 veces mayor que la inicial. Por lo tanto, la tensión inicial del vapor $P_2 = 1,67$ kPa y la humedad relativa $\alpha = 72\%$.

2.210. $V_2/T_1 = T_2 (P_0 - P_1/T_1 (P_0 - P_2)) = 0,91$, donde V_1 , T_1 y P_1 son el volumen del globo, la temperatura y la tensión del vapor de agua saturado en la habitación, y V_2 , T_2 y P_2 , en la calle.

2.211. Una columna de mercurio de altura igual a 1 mm crea la presión de 1 Torr. Por consiguiente, después de colocar el tubo en posición vertical, la presión en él (expresada en torricellis) se hace numéricamente igual a $P_0 + l$, siendo l la altura de la columna de mercurio (en milímetros). Mientras el vapor no es saturado se comporta como un gas perfecto. Su tensión y, por consiguiente, la humedad relativa a temperatura constante es proporcional a la presión total $\alpha_2 = \alpha_1 (P_0 + l)/P_0 = 0,63$.

2.212. Se halla la cantidad de hidrógeno y de oxígeno:

$$v_H = \frac{P_H V}{RT} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \quad \text{y} \quad v_O = \frac{P_O V}{RT} = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

Todo el hidrógeno y el oxígeno reaccionan y se forman $v = 5,5 \cdot 10^{-3}$ mol de agua. La tensión del vapor de agua después de enfriarse no puede ser mayor que $P = 23$ hPa; por consiguiente, en estado de vapor se encontrarán $v_1 = P \cdot 2V/RT = 10^{-3}$ mol de agua. Se condensan $v_2 = 4,5 \cdot 10^{-3}$ mol o $m_2 = 81$ mg de agua.

2.213. Supongamos que inicialmente se encuentran en la cámara v mol de hidrógeno y v mol de oxígeno (en total $2v$ mol de gas). Reaccionan v mol de hidrógeno y $v/2$ mol de oxígeno formando 1 mol de agua. Quedan $v/2$ mol de oxígeno. En la cámara quedan en total $3v/2$ mol de gas. La presión $P_2 = P_1 \frac{3/2 T_2}{T_1} = 1,02 \cdot 10^5$ Pa. Es fácil comprobar que el vapor de agua no se condensa.

2.214. Reaccionan la mitad del metano y todo el oxígeno. Si al principio había en total $2v$ mol, quedan $v/2$ mol de CH_4 y se forman $v/2$ mol de CO_2 . Ellos crean la presión $P'_2 = 500$ hPa. A esto hay que añadir la tensión del vapor de agua saturado. En total se obtiene que $P_2 = 523$ hPa. Damos al lector la posibilidad de comprobar qué parte del vapor de agua se condensa.

2.215. Como el tabique es permeable al hidrógeno, éste ocupa uniformemente todo el espacio entre los émbolos y su presión a la izquierda y a la derecha del tabique será la misma. La tensión del vapor de agua será, por consiguiente, menor que $P_0 = 10^5$ Pa. El vapor no será saturado y puede considerarse como gas perfecto. De la igualdad de las presiones totales se sigue que las presiones del nitrógeno y del agua (vapor de agua) serán iguales. Los volúmenes ocupados por ellos serán proporcionales a sus cantidades. Las cantidades de hidrógeno que se encuentran en las distintas partes del cilindro son proporcionales a sus volúmenes. Así, a la izquierda del tabique se encuentra $1/2$ mol de nitrógeno y $(1/3) \cdot (1/2) = 1/6$ mol de hidrógeno, en total $2/3$ mol a la temperatura $T = 373$ K y la presión $P_0 = 10^5$ Pa. La capacidad buscada es

$$V = 22,4 \frac{\text{dm}^3}{\text{mol}} \cdot \frac{373 \text{ K}}{273 \text{ K}} \cdot \frac{1}{3} \text{ mol} = 20,4 \text{ dm}^3.$$

2.216. A la temperatura $T = 373$ K la tensión del vapor de agua saturado es igual a $P_0 = 10^5$ Pa. En estas condiciones 3 mol de gas deben ocupar el volumen $V = 91,8 \text{ dm}^3$. Pero el agua se encuentra en el volumen $V_d = 81,6 \text{ dm}^3$; por lo tanto, no toda se vaporiza y la presión del vapor de agua es $P_a = 10^5$ Pa. La fuerza F debe equilibrar la fuerza de la presión del hidrógeno. El hidrógeno ocupa todo el volumen entre los émbolos; su presión es $P_h = RT/(V_1 + V_d)$, siendo V_1 la capacidad de la parte izquierda del cilindro. El nitrógeno permanece en la parte izquierda; su presión es $P_n = RT/V_1$. Al escribir estas ecuaciones se ha tenido en cuenta que en el cilindro hay 1 mol de nitrógeno y otro de hidrógeno. La presión total en la parte izquierda del cilindro es $P_h + P_n = P_0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido se halla que $P_h = 3 \cdot 10^4$ Pa y $F = 300$ N.

2.217. La relación entre las densidades del vapor de agua en julio y en noviembre es $\rho_2/\rho_1 = \alpha_2 P_2 T_1/\alpha_1 P_1 T_2 = 3,4$. En julio la densidad del vapor de agua es 3,4 veces mayor.

$$2.218. \rho_{ag}/\rho_{ac} = \mu_{ag} P_{ag}/\mu_{ac} P_{ac} = 190.$$

$$2.219. \rho/\rho_0 = P T_0/P_0 T = 1,9.$$

2.220. La tensión del aire húmedo se compone de la presión del vapor de agua $P_v = 0,844,6 = 35,7$ Torr y de la presión del aire propiamente dicho $P_a = P_0 - P_v = 724,3$ Torr. Las densidades del vapor y del aire a la temperatura $T = 309$ K son

$$\rho_v = \frac{\mu_v P_v}{RT} = 3,34 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3 \quad \text{y} \quad \rho_a = \frac{\mu_a P_a}{RT} = 1,09 \text{ kg/m}^3.$$

La densidad total es igual a la suma de las densidades del vapor y del aire: $\rho = \rho_v + \rho_a = 1,123 \text{ kg/m}^3$.

$$2.221. \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_0}{P_0 - \alpha P (1 - \mu_v / \mu_a)} = 1,005.$$

2.222. $\alpha = \Delta F RT / (\mu_1 - \mu_2) g V P_0 = 0,2$, donde $\mu_1 = 29$ g/mol es la masa molar del aire y $\mu_2 = 18$ g/mol, la masa molar del agua.

2.223. La diferencia de las indicaciones de la balanza está determinada por la variación de la diferencia entre las fuerzas de empuje que actúan sobre los pesos por parte del aire.

La fuerza de empuje es proporcional a la masa de gas desalojada: $F = V p g = \bar{V} \mu P g / RT$. Su variación depende, por consiguiente, de la variación de la masa molar media del aire. Para el aire seco $\mu_1 = 29$ g/mol; para el húmedo, $\mu_2 = \mu_a P_a / P + \mu_1 (P - P_a) / P$, donde $\mu_a = 18$ g/mol es la masa molar del agua.

En el aire seco las pesas equilibran la pieza; por lo tanto,

$$(\rho_1 - \mu_1 P / RT) V_1 = (\rho_2 - \mu_1 P / RT) V_2,$$

donde V_1 es el volumen de la pieza y V_2 , el volumen de las pesas. Para poder apreciar la desviación de la balanza de su posición de equilibrio, en el aire húmedo, siendo la misma la masa de las pesas, debe cumplirse la desigualdad

$$(\rho_1 - \mu_2 P / RT) V_1 - (\rho_2 - \mu_2 P / RT) V_2 \geq m_0.$$

De las ecuaciones obtenidas tenemos que

$$(\rho_1 - \mu_2 P / RT) V_1 - (\rho_2 - \mu_2 P / RT) \frac{\rho_1 - \mu_1 P / RT}{\rho_2 - \mu_1 P / RT} V_1 \geq m_0.$$

De aquí, para la masa de la pieza, se obtiene la condición

$$M = \rho_1 V_1 \geq m_0 \rho_1 \frac{\rho_2 - \mu_1 P / RT}{(\mu_1 - \mu_a)(\rho_2 - \rho_1) P_a / RT} = m_0 \rho_1 \frac{\rho_2 RT - \mu_1 P}{(\mu_1 - \mu_a)(\rho_2 - \rho_1) P_a} \approx \\ \approx m_0 \frac{\rho_1 \rho_2 RT}{(\mu_1 - \mu_a)(\rho_2 - \rho_1) P_a} = 43,2 \text{ g}.$$

El segundo término del numerador de la expresión final puede omitirse, ya que está claro que la adición de la densidad del aire a la del latón es despreciable.

2.224. Por la gráfica determinamos que durante el tiempo $\tau = 50$ min se produjo la fusión del hielo, ya que la temperatura no varió en este tiempo. Cuando el hielo se hubo fundido, la temperatura empezó a elevarse. En 5 min la temperatura se elevó 1°C ; por lo tanto, recibió (a expensas del intercambio calorífico) la cantidad de calor $Q_0 = 4,2 \cdot 10^4$ J. Es evidente que durante el tiempo en que se fundió, el hielo recibió 10 veces más calor, es decir, $Q = 4,2 \cdot 10^5$ J. La masa del hielo fundido (es decir, del hielo que existía al principio) era $m_h = Q / \lambda = 1,235$ kg.

2.225. La tensión del vapor de agua saturado a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ es $P_0 = 10^5$ Pa. Por consiguiente, el vapor que hay en el cilindro es saturado y al disminuir el volumen se condensa en agua. Al mismo tiempo se desprende la cantidad de calor $Q = qm$, donde q es el calor de vaporización del agua. La masa del vapor condensado (vapor contenido en la mitad del volumen) $m = \mu P V / 2RT = 5,9$ g, de manera que $Q = 1,33 \cdot 10^4$ J. El trabajo que realizan las fuerzas

exteriores para bajar el émbolo, $P \Delta V$, no es necesario tenerlo en cuenta aparte. Está incluido en el calor de condensación del vapor.

2.226. La tensión del vapor de agua en el cilindro es prácticamente $P_0 = 10^5$ Pa. Esta presión la tiene el vapor a la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$. Como el émbolo se ha elevado la altura h , el volumen del vapor es $V = hS$ y su masa, $m = \mu P_0 h S / R T = 5,9$ g. El calor se invierte en calentar toda el agua hasta la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ y en vaporizar la masa de agua m . (El trabajo de elevación del émbolo está incluido en q .) Así, $Q = Mc \Delta T + qm$. El tiempo necesario para que se desprenda esta cantidad de calor es

$$\tau = Q/N = (Mc \Delta T + qm)/N = 858 \text{ s} = 14 \text{ min y } 18 \text{ s.}$$

2.227. La temperatura del vapor que hay en el cilindro es $t = 100^\circ\text{C}$. El agua que se inyecta debe calentarse hasta $t = 100^\circ\text{C}$ a expensas de la condensación de cierta masa de vapor:

$$Mc(T - T_0) = qm, \text{ de donde } m = Mc(T - T_0)/q = 3,34 \text{ g.}$$

El volumen de esta masa de vapor $V = mRT/\mu P = 5,3 \text{ dm}^3$. Por lo tanto, $h = V/S = 53 \text{ cm}$.

2.228. $m = q\mu P_0 V / R T c \Delta T = 3,17 \text{ kg}$, donde $c = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ es el calor específico del agua; $\Delta T = 100 \text{ K}$, ya que el agua no puede calentarse hasta una temperatura más alta que $t = 100^\circ\text{C}$.

2.229. El agua se calienta hasta la temperatura a la cual la tensión de su vapor saturado sea igual a la presión atmosférica (100°C), después de esto parte del agua, de acuerdo con la reserva de calor, se vaporiza. La masa del agua vaporizada m se halla por la ecuación del balance térmico:

$$M_1 c_1 (T - T_1) + qm = M_2 c_2 (T_2 - T),$$

$$m = [M_2 c_2 (T_2 - T) - M_1 c_1 (T - T_1)]/q = 38 \text{ g.}$$

Esta masa de vapor ocupa el volumen $V = mRT/\mu P = 64 \text{ dm}^3$. Por lo tanto el émbolo se eleva la altura $h = V/S = 64 \text{ cm}$.

2.230. $\Delta m/m = c(t - t_0)/q = 0,015$, donde $t_0 = 100^\circ\text{C}$ es la temperatura de ebullición a la presión atmosférica normal.

2.231. Durante el período epasivos el agua se encuentra a la presión $P_0 + \rho gh \approx 10^6$ Pa. A esta presión la temperatura de ebullición del agua, como se ve en la fig. 2.43, es $t_1 = 180^\circ\text{C}$. Al llegar a esta temperatura comienza la erupción, sale lanzada la columna de agua y la presión desciende hasta la atmosférica. El período «activo» termina cuando, debido al gasto de calor en la evaporación, la temperatura del agua desciende hasta el punto de ebullición a presión normal, es decir, hasta $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Omitiendo la masa de agua lanzada al iniciarse la erupción y la transmisión de calor durante el tiempo de actividad, se escribe la ecuación del balance térmico: $mc(t_1 - t_2) = q \Delta m$, de donde, $\Delta m/m = c(t_1 - t_2)/q \approx 0,45$.

Elementos de física molecular y atómica

2.232. Cada átomo que se encuentra en el vértice de un cubo pertenece simultáneamente a ocho celdillas. Estos átomos son ocho. Añadiendo el átomo que se halla en el centro del cubo se obtiene $n = 2$ átomos por celdilla elemental. El volumen molar $V = A/\rho$, ya que la masa molar (masa de un mol de átomos) es numéricamente igual a la masa atómica relativa. El volumen de la celdilla es $V_0 = nV/N_A = 2A/\rho N_A = 2,35 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3$. La constante de la red es $a = \sqrt[3]{V_0} = 2,87 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ($2,87 \text{ \AA}$). La distancia mínima entre los átomos es igual a la mitad de la diagonal espacial del cubo: $a\sqrt{3}/2 = 2,485 \text{ \AA}$.

2.233. A una celdilla elemental corresponden cuatro átomos de aluminio. La constante de la red $a = (4A/\rho N_A)^{1/3} = 4,05 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ($4,05 \text{ \AA}$). La distancia mínima entre los átomos es $a/\sqrt{2} = 2,864 \text{ \AA}$.

2.234. Sobre la unidad de superficie de la pared incide en la unidad de tiempo una masa de plata $M_{\tau} = mN_{\tau} = \rho d_{\tau}$, de donde $d_{\tau} = mN_{\tau}/\rho$, siendo N_{τ} el número de partículas que inciden en la unidad de tiempo sobre la unidad de superficie de la pared. La presión sobre dicha pared es $P = m v N_{\tau}$, y $r = \sqrt{2E/m}$. Así, $mN_{\tau} = P \sqrt{m/2E}$, $P = \sqrt{A/2EN_A}$. El espesor de la capa depositada en la unidad de tiempo será $d_{\tau} = (P/\rho) \sqrt{A/2EN_A} = 9 \cdot 10^{-8}$ cm/s.

$$2.235. N = P V N_A / RT = 1,78 \cdot 10^{14}.$$

2.236. Un mol de gas ocupa el volumen $V = RT/P$. A una molécula corresponde el volumen $V_1 = RT/P N_A = kT/P$. La distancia media entre las moléculas es, por lo tanto, $l = (kT/P)^{1/3}$. A la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ la tensión del vapor de agua saturado es $P = 10^5$ Pa. En definitiva se obtiene que $l = 3,7 \cdot 10^{-8}$ m.

$$2.237. N = \frac{m}{\mu} N_A \frac{V_0}{V} = 10^{12}.$$

2.238. El número de partículas radiactivas en toda la atmósfera es $N = M N_A / A = 2,5 \cdot 10^{24}$. La masa del aire atmosférico $M_0 = P_0 4\pi R^2 / g = 4,6 \cdot 10^{18}$ kg. El número de moléculas de aire que hay en toda la atmósfera $N_0 = M_0 N_A / \mu = 9,6 \cdot 10^{23}$. En condiciones normales la forma más fácil de hallar el número de moléculas que hay en el volumen $V = 1$ dm³ de aire es partir de la condición de que 1 mol ($6,02 \cdot 10^{23}$ moléculas) de aire ocupa el volumen $V_0 = 22,4$ dm³/mol; $n_0 = N_0 / V_0 = 2,7 \cdot 10^{22}$ dm⁻³. Conociendo el número total de moléculas de aire y el de partículas radiactivas, se halla el número de partículas que hay en el volumen $V = 1$ dm³; $n = n_0 N / N_0 = 700$ dm⁻³. Por consiguiente una bomba atómica produce 700 partículas radiactivas por cada vez que aspira una persona humana.

2.239. De acuerdo con la ecuación del estado gaseoso la cantidad de oxígeno es $\nu = m/\mu = PV/RT$. El número de moléculas que hay en un mol es igual a la constante de Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹. El número de electrones que hay en un átomo es igual a su número de orden en el sistema periódico. Teniendo en cuenta que la molécula de oxígeno tiene dos átomos se halla

$$N = 2 \frac{m}{\mu} N_A Z = 2 \frac{PV}{RT} N_A Z = 4,3 \cdot 10^{24}.$$

2.240. Al hidrógeno corresponden 3.241 partes de la masa del hidruro de uranio, es decir, $\Delta m = 8,3$ mg. Por la ecuación del estado gaseoso se obtiene la presión $P = 3,5 \cdot 10^4$ Pa.

2.241. Por sus propiedades químicas, el tritio es hidrógeno. A la temperatura ambiente el tritio es un gas de fórmula $^3\text{H}_2$ y masa molar $\mu = 6$ g/mol. Cuando comenzó el plazo de conservación había, por lo tanto, en el recipiente $\nu_H = 1/6$ de mol de hidrógeno. Al cabo de 12 años la mitad de él se había transformado en helio monoatómico y quedaba en total $\nu = 1/4$ de mol. La presión se halla por la ecuación del estado gaseoso: $P = \nu RT/V = 6,2 \cdot 10^5$ Pa.

2.242. Hallemos el número de núcleos de helio que habrá al cabo de un año ($\tau = 3,15 \cdot 10^7$ s); $N = N_0 \tau = 1,17 \cdot 10^{18}$. La cantidad de helio $\nu = N/N_A = 1,95 \cdot 10^{-6}$ mol. La presión $P = \nu RT/V = 4,6 \cdot 10^2$ Pa.

2.243. Escribamos la reacción en que se forma el helio: $^7\text{Li} + ^1_0\text{p} = 2\ ^4\text{He}$. Así, la masa de helio formada será $m_{\text{He}} = 8m_{\text{Li}}/7 = 1,14$ g. El volumen de helio se halla por la ecuación del estado gaseoso: $V = mRT/\mu P = 7,7$ dm³.

2.244. El número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional al número de núcleos radiactivos que hay en el instante dado. El número de cuentas al cabo del tiempo τ constituye el 0,87 del inicial; por lo tanto, el número de núcleos no desintegrados también constituye el 0,87 del número inicial de ellos. Al cabo de otro tiempo τ este número disminuirá hasta el $(0,87)^2$ y así sucesivamente. Nos interesa saber al cabo de cuánto tiempo el número de núcleos no desintegrados se reduce a la mitad: $(0,87)^n = 0,5$; $\tau_{1/2} = n\tau$. De aquí, $\tau_{1/2} \approx 5\tau = 1$ h 50 min.

2.245. El desprendimiento de calor es proporcional al número de desintegraciones por unidad de tiempo, es decir, al número de núcleos de ^{24}Na no desinte-

grados. En las condiciones del problema esta fracción debe constituir el 0,9 de la inicial. Por analogía con el problema 2.244, tenemos que $(0,9)^n = 0,5$; $n\tau = \tau_{1/2}$, $n \approx 6,6$. De aquí, $\tau = \tau_{1/2}/n = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$.

2.246. El tiempo que dura el experimento es igual a $1/3$ del período de semidesintegración. La masa que queda es $m = m_0 2^{-1/3} \approx 0,8m_0$. Por consiguiente, se desintegra el 0,2 de la masa inicial, o sea, 0,2 mg de silicio. Ahora no es difícil obtener que $\Delta T = 0,2m_0 N_A Q / AC = 0,017 \text{ K}$.

2.247. La parte de núcleos desintegrados es $\alpha = AC \Delta T / m N_A Q = 0,3$. Queda el $0,7 \approx 2^{-1/2}$ de la masa inicial. Por lo tanto, el período de semidesintegración $\tau_{1/2} \approx 2\tau = 1 \text{ h } 40 \text{ min}$ (véase la solución del problema 2.246).

2.248. En cierto tiempo τ el satélite choca con las moléculas que se encuentran en un cilindro de sección S y longitud $v\tau$. El número de moléculas que hay en dicho cilindro es igual a $Sv\tau n$. El número de moléculas que hay en la unidad de volumen puede hallarse aplicando la ecuación del estado gaseoso en la forma $P = nkT$: $n = P/kT = N_A P/RT$. Para el número de choques por unidad de tiempo buscado se tiene que $z = SvN_A P/RT = 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$. Hemos considerado que las moléculas están en reposo. En este caso esto no implica un error importante, ya que la velocidad media de las moléculas es mucho menor que la velocidad del satélite.

2.249. Una molécula choca con otra cuando la distancia entre sus centros es menor que d . Supongamos que en cierto tiempo la molécula ha recorrido un camino l . En este caso habrá chocado con las moléculas cuyos centros se encuentran en un cilindro quebrado (los virajes se producen en los puntos de choque) de longitud l y sección πd^2 . El número de moléculas que hay en este cilindro, $n\pi d^2 l$ (n es el número de moléculas en la unidad de volumen), es el número de choques.

Calculemos el recorrido entre dos choques, es decir, el recorrido libre:

$$\lambda = \frac{l}{n\pi d^2} = \frac{l}{n\pi d^2} = \frac{RT_0}{N_A P_0 \pi d^2} = 8,75 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Aquí se ha tomado la presión $P_0 = 10^6 \text{ Pa}$ y la temperatura $T_0 = 273 \text{ K}$. El valor experimental del recorrido libre en estas condiciones es $\lambda = 6,20 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. La discrepancia se debe principalmente a que hemos considerado que todas las moléculas, excepto la elegida, estaban en reposo. Un análisis detallado demuestra que la toma en consideración del movimiento relativo de las moléculas conduce a una variación del recorrido libre de $1/\sqrt{2}$ veces. Multiplicando el resultado antes obtenido por este factor, resulta en definitiva que $\lambda = 6,19 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

2.250. El recorrido libre, proporcional a la presión (véase la solución del problema 2.249), en las condiciones de nuestro problema será aproximadamente $\lambda = 1 \text{ cm}$. Esto significa que las moléculas, entre la pared interior y la exterior de la botella de termo, no chocan prácticamente una con otra. Después de chocar con la pared interior tienen la energía correspondiente a la temperatura $T_1 = 353 \text{ K}$ (hemos tomado el valor medio de la temperatura durante el tiempo que nos interesa). Después de chocar con la pared exterior, la energía de las moléculas es correspondiente a la temperatura $T_2 = 293 \text{ K}$ (tomando la temperatura ambiente $t_2 = 20^\circ \text{C}$). Como las moléculas de aire son biatómicas, para ellas

$$C_V = 5R/2 \text{ y la energía transportada por una molécula es } w = \frac{5R}{2N_A} (T_1 - T_2).$$

El número de moléculas que chocan con la pared en la unidad de tiempo por unidad de superficie es

$$z = \frac{\bar{nv}_x}{2} \approx \frac{PN_A}{2RT} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}},$$

donde T es la temperatura media del gas; tomamos $T = 325 \text{ K}$. En definitiva, para el flujo de calor que sale del agua se tiene

$$q = zwS = \frac{5}{4} P \sqrt{\frac{R}{2\pi T}} (T_1 - T_2) S \approx 3 \text{ J/s}.$$

El tiempo buscado es $\tau = mc \Delta T/q \approx 2,8 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 8 \text{ h}$. Como masa de agua se ha tomado $m = 1 \text{ kg}$.

2.251. Por la condición del problema los orificios son muy pequeños. Vamos a considerar que son pequeños en comparación con el recorrido libre de las moléculas de helio. Entonces todas las moléculas que inciden sobre un orificio pasan de un recipiente a otro. El número de moléculas que chocan con la unidad de superficie es proporcional a la concentración y a la velocidad media de las moléculas: $z \sim nv \sim P \sqrt{T}/T = P/\sqrt{T}$. La energía transportada por las moléculas es proporcional a z y la energía media de las moléculas $w \sim zT \sim P \sqrt{T}$. Los flujos de moléculas y los flujos de energía de la cavidad en estado estacionario son equilibrados por los flujos respectivos de ambos recipientes dentro de la cavidad:

$$\frac{2P_x}{\sqrt{T_x}} = \frac{P}{\sqrt{2T}} + \frac{P}{\sqrt{T}}, \quad 2P_x \sqrt{T_x} = P \sqrt{2T} + P \sqrt{T}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$T_x = T \sqrt{2} \approx 1,4T, \quad P_x = P(\sqrt{2} + 1)/2 \sqrt{2} \approx P.$$

2.252. En los poros delgados no se producen choques entre las moléculas y la probabilidad de infiltrarse a través de la pared es igual para todas las moléculas que entran en los poros del tubo. El número de moléculas que entran en dichos poros depende de su concentración y velocidad (véase la solución del problema 2.251). La velocidad, a una misma temperatura, sólo depende de la masa de la molécula. Por eso puede escribirse:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}},$$

donde $n_1/n_2 = \alpha_0 \approx 0,007$ (el subíndice 1 se refiere al ^{235}U y el subíndice 2, al ^{238}U); $\mu_1 = 349 \text{ g/mol}$ es la masa molar del hexafluoruro de uranio 235, y $\mu_2 = 352 \text{ g/mol}$, la masa molar del hexafluoruro de uranio 238. La relación z_1/z_2 es igual a la relación entre las concentraciones de los correspondientes hexafluoruros en el recipiente R .

De este modo, el aumento de la relación de concentraciones de ^{235}U y ^{238}U (coeficiente de enriquecimiento) es $\gamma = \sqrt{352/349} \approx 1,0043$. Al pasar por n cascadas, el coeficiente de enriquecimiento será $\gamma_n = \gamma^n$. El número de cascadas n se determina por la relación

$$\alpha_n = \alpha_0 \gamma_n = \alpha_0 \gamma^n,$$

o bien

$$n = \frac{\ln(\alpha/\alpha_0)}{\ln \gamma} \approx \frac{\alpha/\alpha_0 - 1}{\gamma - 1}.$$

Esta igualdad aproximada es correcta cuando α/α_0 se aproxima a la unidad. Para los casos que nos interesan el cálculo da $n_1 \approx 450$ y $n_2 \approx 2200$.

2.253. Sea n la concentración de neutrones; ρ , la densidad de la sustancia físil, y r , su dimensión lineal característica (por ejemplo, el radio de una bolita de uranio). El número de neutrones secundarios generado en la unidad de tiempo por un neutrón aislado es proporcional al número de choques de este neutrón con los núcleos, es decir, a la concentración de núcleos o, al fin de cuentas, a la densidad ρ de la sustancia. En total, en el volumen de la sustancia físil hay nV neutrones.

Por lo tanto, el número de neutrones secundarios que se generan en la unidad de tiempo en todo el volumen es $N_+ = A_1 n \rho r^2$. El número de neutrones N_- que abandona el volumen activo depende de su concentración y del área de la superficie de la muestra: $N_- = A_2 n r^2$. En estas expresiones las constantes A_1 y A_2 no dependen de n , ρ y r . En el régimen crítico $N_+ = N_-$, o $\rho r_{cr} = A_1$. Así, pues, el radio crítico es, por consiguiente, inversamente proporcional a la densidad de la sustancia físil. El volumen crítico es, por consiguiente, inver-

samente proporcional a ρ^3 y la masa crítica, inversamente proporcional a ρ^2 . Si las dimensiones lineales del sólido disminuyen 10 veces, la densidad aumenta 10^3 veces. Con esto el volumen crítico disminuye 10 veces y la masa crítica, 10^6 veces.

III. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Electrostática ^{*)}

3.1. La carga de la esfera es igual a la carga del electrón multiplicada por el número de átomos que hay en la esfera: $Q = ne$. Este número es igual al producto de la cantidad de sustancia por la constante de Avogadro: $n = mN_A/A$. La masa de cobre es $m = 4\pi R^3\rho/3$. Por lo tanto, $Q = eN_A/A$. La masa de cobre es $m = 4\pi R^3\rho/3$. Por lo tanto, $Q = eN_A \cdot 4\pi R^3\rho/3A = 5,6 \cdot 10^7$ C.

3.2. $V = N^2e^2/4\pi\epsilon_0 R^2 = 4\pi N_A^2e^2\rho^2/9\epsilon_0 A^2 R^2 = 4,38 \cdot 10^{18}$ N.

3.3. El potencial de la gota grande es $V' = Q/4\pi\epsilon_0 R$, donde Q es la carga de la gota, y R , su radio. La carga de la gota grande es igual a la suma de las cargas de todas las gotitas pequeñas: $Q = Nq = 4\pi\epsilon_0 N/r$, donde r es el radio de las gotitas pequeñas. Hallemos el potencial de la gota grande: $V' = N/rR$. Como el volumen del mercurio se conserva cuando se unen las gotitas, $N \cdot 4\pi r^3/3 = 4\pi R^3/3$, de donde $r^3/R^3 = 1/N$. En definitiva se obtiene que $V' = VN^{2/3}$.

3.4. Después del primer contacto con la placa, la esfera recibe la carga q y en la placa queda la carga $Q - q$ y sus potenciales son iguales. Cuando después de muchos contactos el potencial de la esfera alcanza el potencial de la placa, cuya carga es Q , es ya imposible seguir transportando carga. De estos razonamientos se deduce que la carga máxima de la esfera es $q_{\text{máx}} = Qq/(Q - q)$.

3.5. Al conectarla a tierra, el potencial de la esfera se anula. Cuando se conecta a tierra la primera esfera, la segunda crea en ella el potencial $V = q/4\pi\epsilon_0 R$. En la primera esfera debe surgir una carga que cree un potencial de igual módulo pero de signo contrario: $q_1 = -1/r \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot -qr/R$. Esta carga crea, a su vez, en la segunda esfera el potencial $V' = q_1/4\pi\epsilon_0 R = -qr/4\pi\epsilon_0 R^2$. Para compensar este potencial, en la segunda esfera, al ser conectada a tierra, debe haber una carga $q_2 = -4\pi\epsilon_0 V'r = qr^2/R^2$. Calculemos ahora el potencial de la primera esfera al final del experimento:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \approx -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

3.6. $q = V \cdot 4\pi\epsilon_0 r^3/R (R + r) \approx 4\pi\epsilon_0 V r^3/R^2$.

3.7. El potencial de la envoltura se compondrá del potencial debido a la carga Q_2 inducida en ella y del potencial en el campo de la esfera: $Q_2/4\pi\epsilon_0 R_2 + Q_1/4\pi\epsilon_0 R_2 = 0$, de donde $Q_2 = -Q_1$. El potencial de la esfera se compondrá del potencial V_1 , debido a la propia carga Q_1 , y del potencial V_2 , condicionado por la carga inducida en la envoltura $Q_2 = -Q_1$: $V = V_1 + V_2 = V_1 (R_2 - R_1)/R_2$.

3.8. Después de conectar la esfera con la envoltura, toda la carga se redistribuye entre ellas de tal modo que los potenciales de la esfera y de la envoltura serán iguales. El potencial de la envoltura es $V_2 = Q/4\pi\epsilon_0 R_2$, donde $Q = 4\pi\epsilon_0 V_1 R_1$. En definitiva el potencial de la envoltura (y el de la esfera) será $V_2 = V_1 R_1/R_2$.

3.9. La carga q del condensador después de separar las placas no varía; por consiguiente, $q = V_1 C_1 = V_2 C_2$, donde $C_1 = \epsilon_0 S/d_1$ y $C_2 = \epsilon_0 S/d_2$. De aquí se obtiene que $V_2 = V_1 d_2/d_1 = 400$ V.

Observación. A primera vista puede parecer que aumentando la distancia d entre las placas del condensador plano con carga puede conseguirse una diferen-

^{*)} En todos los problemas de este capítulo la permitividad del aire se supone igual a la unidad y en las expresiones de las fórmulas no figura.

cia de potencial tan grande como se desee. Advertimos, sin embargo, que las fórmulas de C_1 y C_2 dadas anteriormente sólo son válidas para los condensadores planos en los cuales la distancia entre las placas es mucho menor que las dimensiones lineales de éstas (en este caso $d_2 \ll \sqrt{S} = 25$ cm).

3.10. La capacidad y la carga del sistema de tres condensadores son

$$C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q = \mathcal{E}C = \frac{\mathcal{E}C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

A esta misma magnitud q es igual la carga q_1 del condensador C_1 y la carga total $q_2 + q_3$ de los condensadores C_2 y C_3 . Las diferencias de potencial en los condensadores C_2 y C_3 son iguales entre sí (acoplamiento en paralelo); por consiguiente, $V_2 = V_3 = q_2 C_2 = q_3 C_3$. Resolviendo conjuntamente el sistema de ecuaciones obtenido se determinan q_2 y q_3 . En definitiva resulta que

$$q_1 = \frac{\mathcal{E}C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q_2 = \frac{\mathcal{E}C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \quad \text{y} \quad q_3 = \frac{\mathcal{E}C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

3.11. Las capacidades de la batería de condensadores con el interruptor K abierto y cerrado son: $C_1 = 2C/3 + CC_x/(C + C_x)$ y $C_2 = 3C(C + C_x)/(3C + C + C_x)$. Igualando estas expresiones se obtiene que $C_x = C/2$.

3.12. $V_{ab} = \mathcal{E}C(C_1 + C_2)/(C_1 + C)(C_2 + C)$.

3.13. $V_{ab} = (\mathcal{E}_1 C_1 + \mathcal{E}_2 C_2)/(C_1 + C_2)$.

3.14. Sean q_1 y q_2 las cargas de los condensadores después de aumentar la distancia entre las placas de uno de ellos, y V , la diferencia de potencial en ellos. Entonces

$$q_1 + q_2 = q_0, \quad q_0 = 2C_0 V_0 \quad \text{y} \quad V = q_1/C_0 = 3q_2/C_0.$$

De estas relaciones se hallan

$$q_1 = 3C_0 V_0/2, \quad q_2 = C_0 V_0/2 \quad \text{y} \quad V = 3V_0/2.$$

3.15. De acuerdo con la ley de conservación de la carga eléctrica, la carga total Q del sistema de los dos condensadores antes y después de conectarlos en el circuito cerrado, es la misma: $q'_1 - q'_2 = q_1 + q_2 = Q$, donde q_1 y q_2 son las cargas que se buscan. Es evidente que después de conectar los condensadores las diferencias de potencial en las placas de ambos serán iguales entre sí: $q_1/C_1 = q_2/C_2$. En definitiva se obtiene

$$q_1 = C_1(q'_1 - q'_2)/(C_1 + C_2), \quad q'_2 = C_2(q_1 - q'_2)/(C_1 + C_2).$$

3.16. La carga $q = \mathcal{E}C_1$ recibida de la batería de f.e.m. $\mathcal{E}$ por el condensador C_1 , después de conectar el condensador C_2 se distribuye entre ellos proporcionalmente a sus capacidades (ya que la diferencia de potencial en ellos será la misma). Calculemos estas cargas: $q = q_1 + q_2 = \mathcal{E}C_1$, $q_1 = \mathcal{E}C_1/(C_1 + C_2)$ y $q_2 = C_1 C_2/(C_1 + C_2)$. Después de conectar los condensadores C_1 y C_2 las cargas se compensan parcialmente y la carga total $Q = q_1 - q_2 = \mathcal{E}C(C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)$. La diferencia de potencial en los condensadores es $V = Q/(C_1 + C_2) = \mathcal{E}C(C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)^2$.

3.17. Después de conectar el condensador C_1 al condensador C_2 la carga $q = \mathcal{E}C_1$ se distribuye entre ellos proporcionalmente a sus capacidades (ya que la diferencia de potencial en ellos será la misma):

$$q = q_1 + q_2 = \mathcal{E}C_1, \quad q_1/C_1 = q_2/C_2 \quad \text{y} \quad q_2 = \mathcal{E}C_1 C_2/(C_1 + C_2).$$

3.18. La carga inicial del condensador es $q_0 = C_0 V_0$. Después de conectar C la carga q_0 se distribuye entre los condensadores C_0 y C . Cuando se desconecta C de C_0 , en ambos condensadores habrá la diferencia de potencial $V_1 = q_0/(C_0 + C) = C_0 V_0/(C_0 + C)$. La carga que queda en C_0 es $q_1 = C_0 V_1 = C_0^2 V_0/(C_0 + C)$. Repitiendo esta operación tendremos un conjunto de condensadores cargados hasta las tensiones $V_1, V_2, V_3, \dots$, en el cual V_n ($n =$

$= 1, 2, 3, \dots$) es fácil de determinar aplicando el método de la inducción matemática: $V_n = C_0 V_0 \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^n$. La tensión total

$$V = V_1 + V_2 + \dots = \frac{C_0 V_0}{C_0 + C} \left(1 + \frac{C_0}{C_0 + C} + \frac{C_0^2}{(C_0 + C)^2} + \dots \right).$$

Sumando la progresión geométrica obtenida se determina la diferencia de potencial máxima: $V = C_0 V_0 / C = 8000 \text{ V}$.

3.19. Antes de cerrar el interruptor K (fig. 3.7) la carga total de las placas derechas de los condensadores era nula. Después de cerrar el interruptor, el condensador inferior está descargado y en el superior la carga es igual a $\mathcal{E}C$, siendo positiva en la placa de la derecha. Esta carga debe pasar por el galvanómetro hacia las placas derechas de los conductores.

3.20. Antes de cerrar el interruptor K los condensadores C_1 y C_2 estaban acoplados en serie y conectados a la batería. Sus cargas eran iguales. En la placa derecha del condensador C_1 y en la placa superior del condensador C_2 las cargas tenían signos distintos; la carga total de estas placas era nula. Después de cerrar el interruptor, la diferencia de potencial entre las placas del condensador C_1 y las cargas en ellas, se anularon, y las placas del condensador C_2 adquirieron las cargas $\pm \frac{1}{2} C_2$ (en la placa superior la carga es $+\frac{1}{2} C_2$). De este modo, la carga total de la placa derecha del condensador C_1 y la placa superior del condensador C_2 se hizo igual a $\mathcal{E}C_2$. Esta carga pasó por el galvanómetro al cerrar el interruptor K .

3.21. Las cargas totales de los pares de conductores izquierdo y derecho deben ser iguales entre sí, ya que estos pares están acoplados en serie. En este caso la diferencia de potencial en ellos es inversamente proporcional a sus capacidades:

$$V_1 = \frac{\mathcal{E}(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}, \quad V_2 = \frac{\mathcal{E}(C_1 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Las cargas de los condensadores C_2 y C_4 son:

$$q_2 = \frac{\mathcal{E}C_2(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}, \quad q_4 = \frac{\mathcal{E}C_4(C_1 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Como hasta que se cerró el interruptor todos los condensadores estaban descargados, la carga buscada, que pasa por el galvanómetro, es

$$q = q_4 - q_2 = \frac{\mathcal{E}(C_1 C_4 - C_2 C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

3.22. Añadamos a cada placa la carga $q' = -5q/2$ (semisuma de las cargas de las placas tomada con signo contrario). Entonces el condensador resultará cargado «normalmente» y las cargas de las placas serán $\pm 3q/2$. La diferencia de potencial entre las placas será $3q/2C$. Pero los campos de las cargas iguales de las placas dentro del condensador se compensan uno a otro. Por consiguiente, las cargas que hemos añadido no cambian el campo entre las placas ni la diferencia de potencial en el condensador. Así, pues, la diferencia de potencial buscada es igual a $3q/2C$.

3.23. En virtud del principio de la superposición, el campo dentro del condensador pequeño (fig. 3.10, a) se duplica, y en la parte restante del condensador grande no varía. La diferencia de potencial entre las placas del primer condensador aumenta vez y media. En el segundo caso (fig. 3.10, b) la diferencia de potencial se reduce a la mitad.

3.24. Cuando las armaduras del condensador no están cargadas, no crean campo eléctrico. Por consiguiente, el campo sólo es creado por la placa, que tiene la carga Q (fig. 3.104). Este campo es simétrico respecto de la placa; su

intensidad es $E = Q/2\epsilon_0\epsilon S$. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es

$$\Delta V = V_2 - V_1 = E(l_2 - l_1) = Q(l_2 - l_1)/2\epsilon_0\epsilon S.$$

3.25. Como la carga total de la placa es nula, la carga q inducida en la superficie izquierda de ella será igual en módulo y de signo contrario a la carga inducida en la superficie derecha. El campo en cualquier punto del espacio (fig. 3.105) es igual a la suma de los campos que crean los cuatro planos cargados

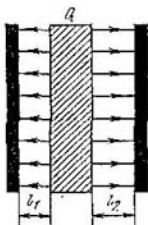


Fig. 3.104.

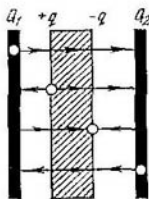


Fig. 3.105.

($+Q_1, +q, -q, +Q_2$). La intensidad global del campo dentro de la placa metálica, basándose en el principio de la superposición, se puede escribir en la forma

$$E = (Q_1 + q + q - Q_2)/2\epsilon_0\epsilon S,$$

donde S es el área de las placas y de las armaduras del condensador. Pero la intensidad del campo eléctrico dentro del metal es $E \sim 0$, de donde se sigue que $q = -(Q_2 - Q_1)/2$.

3.26. El condensador complejo que se forma puede considerarse como una batería de tres condensadores de igual capacidad $C_0 = \epsilon_0 S/d$: el condensador I (placas 2 y 3), el condensador II (placas 1 y 2) y el condensador III (placas 3 y 4). Los condensadores I y II están acoplados en paralelo: las placas 1 y 3 tienen potenciales iguales (ya que están unidas por un conductor) y la placa 2 es común; el condensador III está acoplado en serie a este par. Por el esquema de conexión equivalente (fig. 3.106) se halla la capacidad del condensador complejo:

$$C = (1/2C_0 + 1/C_0)^{-1} = 2C_0/3 = 2\epsilon_0 S/3d.$$

3.27. Al conectarlos según el esquema equivalente, representado en la fig. 3.107, los condensadores I (placas 1 y 2) y III (placas 3 y 4) están acoplados en serie, ya que los potenciales de las placas 1 y 4 son iguales, y el condensador II (placas 2 y 3) está acoplado en paralelo a este par. La carga en el condensador II es $q_{II} = \frac{1}{2}C_0 - \epsilon_0 S/d$, y las cargas de los condensadores I y III son: $q_I = q_{III} = \frac{1}{2}C_0/2 = \epsilon_0 S/2d$. En la placa 2 se hallan las cargas positivas de los condensadores I y II; por consiguiente, la carga total $q_2 = q_I + q_{II} = 3\epsilon_0 S/2d$. La carga de la placa 3 es, evidentemente, negativa: $q_3 = -q_2$. Advertimos que las placas 1 y 4 resultan cargadas. La causa de que pasen las cargas es el campo disperso del condensador II, formado por las placas 2 y 3.

3.28. La placa 1 en la nueva posición divide el condensador en dos, cada uno de los cuales con la capacidad $2C$ (fig. 3.15). En estas condiciones la placa 1 sirve de armadura negativa del condensador derecho (su carga es q_2) y de armadura positiva al izquierdo (su carga es q_3). La carga total de la placa es igual a $\frac{1}{2}C$; por consiguiente, $q_3 - q_2 = \frac{1}{2}C$. La diferencia de potencial total en los

condensadores formados es igual a la f.e.m. de la batería:

$$q_3/2C + q_2/2C = \mathcal{E}, \text{ de donde } q_2 = \mathcal{E}C/2 \text{ y } q_3 = 3\mathcal{E}C/2.$$

Teniendo en cuenta la polaridad, se determina que la carga de la armadura 2 es igual a $+\mathcal{E}C/2$, y la carga de la armadura 3, igual a $-3\mathcal{E}C/2$.

Advertimos que, aunque la armadura positiva de uno de los condensadores formados está unida con la armadura negativa de otro, estos condensadores no

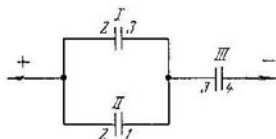


Fig. 3.106.

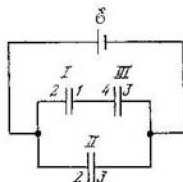


Fig. 3.107.

pueden considerarse acoplados en serie según el concepto ordinario, es decir, la carga no se puede calcular como el producto de la diferencia de potencial entre las placas del condensador por la capacidad $C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, considerando que los potenciales están distribuidos en proporción inversa a las capacidades, etc. Todas estas relaciones se cumplen en el caso en que las cargas de ambos condensadores son iguales. Precisamente esta condición no se cumple en el caso dado.

3.29. El cálculo demuestra que el campo en el espacio derecho (fig. 3.16) es nulo y que la diferencia de potencial en el espacio izquierdo es igual a la f.e.m. de la batería. Por lo tanto, después de producirse el cortocircuito no pasará carga por el galvanómetro.

3.30. La superficie del dieléctrico (fig. 3.108) será equipotencial, ya que la intensidad del campo eléctrico es perpendicular a ella. Podemos figurarnos que la superficie del dieléctrico está cubierta por una capa delgada de metal. Esta capa no altera la equipotencialidad del plano ni varía su potencial. De este modo, la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador y, por consiguiente, la capacidad siguen siendo iguales que antes de metalizar la superficie del dieléctrico. Esto significa que el condensador de capacidad C puede considerarse como dos condensadores acoplados en serie cuyas capacidades son C_1 y C_2 , es decir, $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$. Calculemos C_1 y C_2 : $C_1 = \varepsilon \varepsilon_0 S / d_1$ y $C_2 = \varepsilon_0 S / d_2$. La capacidad resultante es $C = \varepsilon \varepsilon_0 S / (d_1 + d_2) = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$.

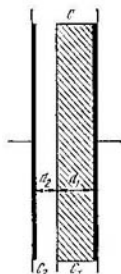


Fig. 3.108.

3.31. Sean S y d el área de las placas del condensador y la distancia entre ellas. Entonces en el primer caso tenemos (véase la solución del problema 3.30) unos condensadores acoplados en serie, con los parámetros S y $d/2$, y en el segundo, acoplados en paralelo: uno con los parámetros kS y d , y otro, con los parámetros $(1-k)S$ y d . En ambos casos uno de los condensadores está lleno de dieléctrico. Las capacidades de los sistemas primero y segundo son:

$$C_1 = \left(\frac{d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} + \frac{d}{2\varepsilon_0 S} \right)^{-1} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(1+\varepsilon)}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 k S}{d} + \frac{\varepsilon_0 (1-k) S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

De la igualdad $C_1 = C_2$ se obtiene que $k = 1/(1+\varepsilon)$.

3.32. $C = \epsilon C_0/(\epsilon + 1)$.

3.33. La intensidad E del campo y el potencial V varían en dependencia del espesor h de la capa de keroseno del modo siguiente:

$$E = 2\mathcal{E}/(2d - h), \quad h < d/2;$$

$$E = \mathcal{E}/(2d - h), \quad h > d/2;$$

$$V = \mathcal{E}(d - h)/(2d - h), \quad h < d/2;$$

$$V = \mathcal{E}d/2(2d - h), \quad h > d/2.$$

Las gráficas se dan en la fig. 3.109.

3.34. Si el condensador esférico tiene la carga q , el potencial de la armadura interior (véanse las soluciones de los problemas 3.7 y 3.8) será $V = 4\pi\epsilon_0 Q(R - r)/Rr$. El potencial de la armadura exterior es nulo. Por consiguiente, para la capacidad del condensador esférico se obtiene $C = 4\pi\epsilon_0 Rr/(R - r)$. La intensidad del campo es máxima cerca de la superficie de la armadura interior del condensador:

$$V_0 = Q/4\pi\epsilon_0 r^2 = V_0 R/(R - r) r = 20 \text{ kV/cm.}$$

3.35. Utilizando la solución del problema 3.34, escribimos la expresión de la diferencia de potencial V en el condensador esférico en dependencia de la intensidad E del campo cerca de la superficie de la armadura interior: $V = -Er(R - r)/R$. Esta expresión tiene el máximo cuando $r = R/2$. De aquí resulta que $V_0 = E_0 R/4 = 30 \text{ kV}$.

3.36. $q_{\text{máx}} = 4\pi\epsilon_0 e r^2 E_0 = 2.7 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. La ruptura comienza en el dieléctrico.

3.37. Cerca de la superficie de la Tierra el campo lo crea la carga de la Tierra; su intensidad es $E_0 = q/4\pi\epsilon_0 R^2$, donde R es el radio de la Tierra. A la altura h el campo lo crean la carga de la Tierra y la carga de la capa atmosférica de altura h , de manera que

$$\frac{E_0}{2} = \frac{q + 4\pi R^2 h \rho}{4\pi\epsilon_0 (R + h)^2} \approx \frac{q + 4\pi R^2 h \rho}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Se han tenido en cuenta que $h \ll R$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido se halla $\rho = -\epsilon_0 E_0/2h = -4.4 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$.

3.38. Calculemos la fuerza de atracción F entre las placas del condensador. En el condensador plano una de las placas se encuentra en el campo uniforme creado por la otra placa. La intensidad de este campo es igual a la mitad de la intensidad global del campo dentro del condensador: $E_1 = q/2\epsilon_0 S$. La fuerza que actúa sobre la placa es $F = qE_1 = q^2/2\epsilon_0 S$. Teniendo en cuenta que la carga $q = VC = V\epsilon_0 S/d$, se obtiene que $F = \epsilon_0 S V^2/2d^2 = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$. Es evidente que para conservar el equilibrio hay que añadir al otro platillo de la balanza una sobrecarga de masa $m = F/g = 2.25 \text{ g}$.

3.39. La fuerza que actúa sobre el muelle cambió en la magnitud $Q^2/2\epsilon_0 S$ (véase la solución del problema 3.38). Por definición, $k = \Delta F/\Delta l$, de donde el alargamiento del muelle es $\Delta l = Q^2/2\epsilon_0 kS$.

3.40. Aumenta $4\epsilon^2/(\epsilon + 1)^2 = 2.25$ veces.

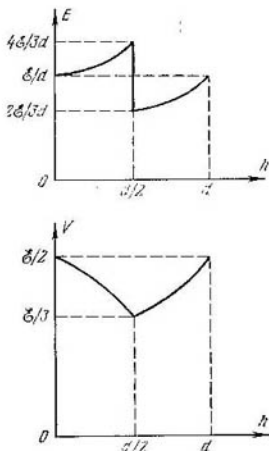


Fig. 3.109.

3.41. La energía de un condensador de capacidad C con carga q es igual a $U_1 = q^2/2C$. Cuando se vacía el keroseno, la carga no varía y la capacidad se reduce a la mitad. La energía se duplica. Esta energía, $U = 2U_1$, se desprende al descargarse el condensador.

3.42. La energía del sistema se compone de las energías de los dos condensadores. Al principio la energía es $U_1 = C_1 V_1^2/2 + C_2 V_2^2/2$. Después de acoplar los condensadores se establece en ellos la diferencia de potencial total (véanse las soluciones de los problemas 3.15 y 3.16) $V = (C_1 V_1 \pm C_2 V_2)/(C_1 + C_2)$. El signo superior se refiere al caso a) y el inferior, al caso b). La energía en el nuevo estado es

$$U_2 = (C_1 + C_2) V^2/2 = (C_1 V_1 \pm C_2 V_2)^2/2 (C_1 + C_2).$$

La diferencia entre las energías inicial y final, que se desprende al descargarse los condensadores es:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = C_1 C_2 (V_1 \mp V_2)^2/2 (C_1 + C_2).$$

Ley de Ohm. Leyes de la electrólisis

3.43. Calculando las resistencias de ambos circuitos e igualándolas, se obtiene que $r = 2R$ y la resistencia total del circuito $R_{AB} = 2R$. La solución puede simplificarse mucho si se advierte la regularidad con que se forma el segundo circuito: en paralelo con la resistencia R_{AB} del primer circuito está conectada la resistencia $2R$, y después, en serie, la resistencia R . Con esto se

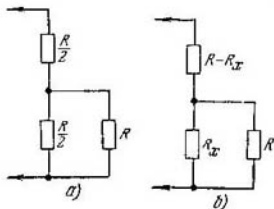


Fig. 3.110.

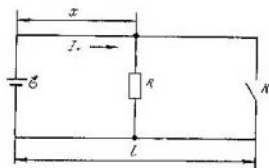


Fig. 3.111.

obtiene de nuevo la resistencia inicial. Pero de forma exactamente igual se obtiene el primer circuito si se toma como inicial la resistencia r . Es evidente que las resistencias de los circuitos primero y segundo sólo serán iguales en el caso en que sean iguales a r .

3.44. La solución se reduce a comparar las tensiones en la resistencia R en los dos circuitos (fig. 3.110). Se obtiene que para duplicar la tensión en la resistencia R hay que elegir la resistencia de la parte del potenciómetro a que está conectada la carga, $R_x = R (\sqrt{65} - 1)/8 \approx 7R/8$.

3.45. La rotura del aislamiento en un punto cualquiera equivale a intercalar en dicho punto cierta resistencia R (fig. 3.111). Si el extremo de la línea está abierto, de acuerdo con la ley de Ohm, $\phi = (2xp + R) I_1$, donde ϕ es la resistencia de la unidad de longitud del conductor; x , la distancia hasta la parte deteriorada, e I_1 , la corriente en el circuito de la fuente. Cuando se cierra el extremo de la línea, en paralelo a la resistencia R se conecta además la parte cortocircuitada de la línea, de manera que

$$\phi = \left[2xp + \frac{R \cdot 2(L-x)\rho}{R + 2(L-x)\rho} \right] I_2,$$

stendo I_2 la corriente en el circuito de la fuente cuando el extremo de la línea está cerrado. Sustituyendo en la segunda ecuación $x = \xi/2\rho I_1 - R/2\rho$ de la primera ecuación, se obtiene para R la siguiente ecuación cuadrática:

$$I_2 R^2 - 2\xi \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) R + \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(\frac{\xi^2}{I_1} - 2L\rho\xi \right) = 0,$$

de donde

$$R_{1,2} = \frac{1}{2I_2} \left\{ 2\xi \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \pm \left[4\xi^2 \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right)^2 - 4I_2 \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(\frac{\xi^2}{I_1} - 2L\rho\xi \right) \right]^{1/2} \right\}.$$

Utilizando los datos numéricos del problema y teniendo en cuenta que $\rho = 1,25 \text{ } \Omega/\text{km}$, resulta que

$$R_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{146}}{3,6} \text{ } \Omega, \text{ de donde } R_1 \approx 10 \text{ } \Omega \text{ y } R_2 \approx 3,3 \text{ } \Omega.$$

Ahora se calculan los valores respectivos de x : $x_1 = 2 \text{ km}$ y $x_2 = 4,7 \text{ km}$. Es evidente que el valor de x_2 no corresponde a la condición del problema; por lo tanto, en definitiva se tiene que $R = 10 \text{ } \Omega$ y $x = 2 \text{ km}$.

3.46. $R = 8 (R_0 + 2L\rho)/225$.

3.47. La aguja se desvía $n = I/i_0$ divisiones, siendo I la corriente en el circuito del par termoelectrico e i_0 , la sensibilidad del galvanómetro. De acuerdo con la ley de Ohm, $I = \xi/R = \xi_0 t/R$, donde t es la temperatura de la soldadura calentada del par, y la resistencia total del circuito es

$$R = r + \frac{l}{S} S_1 + \frac{l}{S} \rho_2 = r + \frac{l}{\pi a^2} (\rho_1 + \rho_2).$$

Por consiguiente,

$$n = \frac{\xi_0 t}{i_0} \left[r + \frac{l}{\pi a^2} (\rho_1 + \rho_2) \right]^{-1} = 3 \text{ divisiones.}$$

3.48. A través del voltímetro V_1 pasa la corriente I_1 , y a través del voltímetro V_2 , la corriente $I_1 - I_2$. Como los voltímetros son iguales, sus indicaciones son proporcionales a las corrientes que pasan por ellos: $V_1/V_2 = I_1/(I_1 - I_2)$; de donde $V_2 = (I_1 - I_2) V_1/I_1 = 0,1 \text{ V}$.

3.49. Designemos por r la resistencia de los voltímetros y por R la de las resistencias. La corriente que pasa a través de la tercera resistencia (fig. 3.24) es igual a la que pasa por el tercer voltímetro: $I_3 = V_3/r$. La tensión en esta resistencia es igual a $V_3 R/r$. La suma de las tensiones en el voltímetro V_3 y en la tercera resistencia es igual a la tensión buscada en el segundo voltímetro: $V_2 = V_3 (1 + R/r)$. La corriente que pasa por la segunda resistencia es igual a la suma de las corrientes I_3 e $I_2 = V_2/r$; la tensión en ella es igual a $(V_3 + V_2) R/r$. La suma de las tensiones en la segunda resistencia y en el segundo voltímetro es igual a la tensión en el primer voltímetro: $V_1 = V_2 + (V_3 + V_2) R/r$. Eliminando de estas ecuaciones la magnitud R/r , se obtiene $V_2^2 + V_3 V_2 - V_3 (V_1 + V_3) = 0$. De donde

$$V_2 = [1 \frac{3}{4} + V_3 (V_1 + V_3)]^{1/2} - V_3/2 \approx 8,65 \text{ V.}$$

3.50. Cuando en el circuito del par termoelectrico se conecta el primer galvanómetro, pasa por él la corriente $I_1 = \xi/(r_1 + R)$. Análogamente, cuando se conecta el segundo galvanómetro, por el circuito del termopar pasa la corriente $I_2 = \xi/(r_2 + R)$, de donde

$$\xi = \frac{I_1 I_2 (r_2 - r_1)}{I_1 + I_2} = 1,03 \cdot 10^{-2} \text{ V y } R = \frac{\xi - I_1 r_1}{I_1} = 11,25 \text{ } \Omega.$$

3.51. La condición de igualdad de las tensiones en la resistencia del shunt r_{sh} y en el galvanómetro (fig. 3.112) es: $ir = (I - i)r_{sh}$, donde I es la corriente en el circuito exterior, e i , la corriente que pasa por el galvanómetro. Por consiguiente, $r_{sh} = ir/(I - i) = r/(n - 1)$, donde n es el número que indica las veces

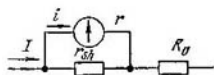


Fig. 3.112.

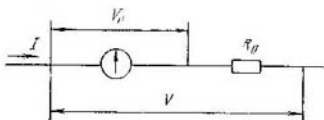


Fig. 3.113.

en que ha disminuido la sensibilidad del galvanómetro. De acuerdo con la condición, $r_{sh}r/(r_{sh} + r) + R_0 = r$, de donde $R_0 = r^2/(r_{sh} + r) = r(n - 1)/n = 260 \Omega$.

3.52. Es evidente que toda la escala del aparato corresponde a la corriente que pasa por él $I = i_0 n = 10^{-3} A$, donde i_0 es el valor de una división, y n , el número de divisiones de la escala. Para hacer de este aparato un voltímetro hay que conectar en serie con él una resistencia adicional R_0 (fig. 3.113), que se halla por la ecuación $V_0 = Ir + IR_0$, de donde $R_0 = (V_0 - Ir)/I \approx 2 \cdot 10^5 \Omega = 200 k\Omega$. Y para hacer del aparato un miliamperímetro hay que shuntarlo (fig. 3.114). Tenemos que $Ir = (I_0 - I)r_{sh}$, de donde $r_{sh} = Ir/(I_0 - I) \approx 0,0625 \Omega$.

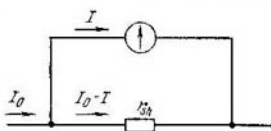


Fig. 3.114.

3.53. La corriente que pasa por el galvanómetro es igual en ambos casos. La corriente total se distribuye entre el shunt y el circuito del galvanómetro en proporción inversa a sus resistencias. Teniendo en cuenta estas condiciones, se escribe

$$I_1 r_{sh}/(r + r_1) = I_2 r_{sh}/(r + r_1 + r_2),$$

donde r es la resistencia del galvanómetro y r_{sh} , la resistencia del shunt. De aquí se obtiene que $r = I_1 r_2/(I_2 - I_1) = r_1 = 8 \Omega$.

3.54. Sea r la resistencia del voltímetro; V , la tensión máxima en él, e I , la corriente que pasa el mismo con dicha tensión. Si se utilizan las resistencias adicionales, la corriente máxima debe ser la misma que antes. Para los tres casos se tiene:

$$I(R_1 + r) = nV, \quad I(R_2 + r) = mV \quad \text{y} \quad I \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + r \right) = kV,$$

donde R_1 y R_2 son las resistencias adicionales, y k , la magnitud que se busca. Teniendo en cuenta que $Ir = V$, estas ecuaciones pueden reducirse a la forma

$$R_1 + r = nr, \quad R_2 + r = mr \quad \text{y} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = r \cdot kr.$$

De estas ecuaciones se obtiene que $k = (mn - 1)/(m + n - 2)$.

3.55. La resistencia del shunt con la cual la aguja se desvía hasta el final de la escala cuando la corriente en el circuito exterior es $I = 7,5 A$, se determina por la relación $i_0 r = (I - i_0)r_{sh}$, donde i_0 es la corriente que pasa por el aparato cuando su aguja se desvía hasta el final de la escala, y r , la resistencia de dicho aparato (fig. 3.115). Ahora hay que determinar i_0 y r . Sabemos que cuando se conecta el shunt, cuya resistencia es $r_{sh} = 100 \Omega$, la aguja se desvía hasta el

final de la escala si la corriente en el circuito exterior $I' = 3$ A. Por consiguiente, $i_0 r = (I' - i_0) r'_{sh}$. Cuando se conecta la resistencia adicional $R_0 = 300$ Ω

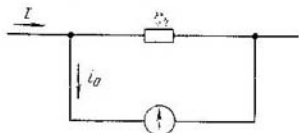


Fig. 3.115.

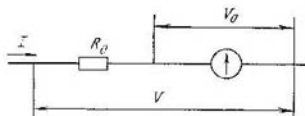


Fig. 3.116.

(fig. 3.116), la aguja se desvía hasta el final de la escala si la tensión es $V = 4V_0 = 4i_0 r$, o $i_0 r + i_0 R = 4i_0 r$, de donde $r = R_0/3 = 100$ Ω . En definitiva se hallan

$$i_0 = I' r'_{sh} / (r + r'_{sh}) = 1,5 \text{ A} \quad \text{y} \quad r'_{sh} = 25 \Omega.$$

3.56. Supongamos que las corrientes que pasan por las resistencias 1, 2, 3 y 4 son I_1, I_2, I_3 y I_4 , la que pasa por el puente es I y la que atraviesa la batería es I_0 (fig. 3.117). Omitiendo la resistencia interna de la batería, se determina

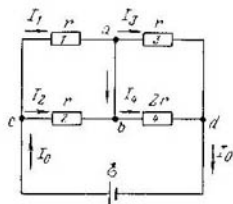


Fig. 3.117.

la corriente en el circuito de la fuente: $I_0 = \mathcal{E}/R$, donde R es la resistencia entre los puntos c y d . Es evidente que $R = r/2 + 2r/3 = 7r/6$. En el punto a se tiene $I_1 = I_3 + I$. La igualdad de las tensiones en las resistencias 1 y 2 da que $rI_1 = rI_2$; en el punto c $I_0 = I_1 + I_2$, de donde $I_1 = I_2 = I_0/2$. La igualdad de las tensiones en las resistencias 3 y 4 da que $rI_3 = 2rI_4$; en el punto d se tiene que $I_3 + I_4 = I_0$, de donde $I_1 = I_0/3$ e $I_3 = 2I_0/3$. De las últimas tres ecuaciones se obtiene que

$$I = I_1 - I_3 = I_0/6 \quad \text{o} \quad I = \mathcal{E}/7r.$$

3.57. Escribamos la ley de Ohm para la resistencia R conectada con los condensadores y cortocircuitada: $\mathcal{E} = (R + r) I$,

$\mathcal{E} = r \cdot 3I$, donde r es la resistencia interna de la batería. Ahora es fácil determinar la tensión en la resistencia R , igual a la suma de las tensiones en los condensadores: $V = IR = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \mathcal{E}/3 = 2\mathcal{E}/3$. Teniendo en cuenta que las cargas de los condensadores son iguales, se obtienen las tensiones en ellos

$$V_1 = 2\mathcal{E}C_2/3 (C_1 + C_2) \quad \text{y} \quad V_2 = 2\mathcal{E}C_1/3 (C_1 + C_2).$$

3.58. Designemos las cargas de los condensadores $C, 2C$ y $3C$ por q_1, q_2 y q_3 respectivamente. Supongamos que en el condensador C la carga positiva se encuentra en la placa derecha. Entonces, por la ley de conservación de la carga, se tiene que $q_3 = q_2 + q_1$. La diferencia de potencial en los condensadores $2C$ y C es igual a la caída de tensión en la resistencia R : $q_2/2C - q_1/C = \mathcal{E}/3$. Análogamente, la caída de tensión en las resistencias R y $2R$ (igual a la f.e.m. $\mathcal{E}$) es igual a la diferencia de potencial en los condensadores $2C$ y $3C$: $q_2/2C + q_3/3C = \mathcal{E}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones se halla que $q_1 = 2\mathcal{E}C/9$.

Observación. Conviene prestar atención a que $q_1 > 0$. Esto significa que la suposición acerca del signo de la carga en las armaduras de los condensadores C y $2C$ fue acertada (de esta suposición depende la colocación de los signos en la primera relación). Se comprende que si la suposición hubiera sido otra, la respuesta tendría otro signo.

3.59. Antes de cerrar el interruptor K la carga total de la placa inferior del condensador C y la placa izquierda del condensador $2C$ era igual a cero. Después de cerrar el interruptor se crea un circuito al cual pueden aplicarse razonamientos análogos a los hechos en el problema 3.58. Supongamos que están cargadas positivamente la placa inferior del condensador C y la placa izquierda del condensador $2C$. Tomando en consideración que la diferencia de potencial en el condensador C es igual (cuando el interruptor K está cerrado) a la caída de tensión en las resistencias $2R$ y $3R$, y que la diferencia de potencial en el condensador $2C$ es igual a la caída de tensión en la resistencia $3R$, se tiene que

$$q_1/C = 5\mathcal{E}/6, \quad q_2/2C = \mathcal{E}/2 \quad \text{y} \quad q = q_1 + q_2,$$

donde q_1 y q_2 son las cargas de los condensadores C y $2C$, y q , la carga que se busca, que pasa por el interruptor y es igual a la suma de las cargas de las placas positivas de estos dos condensadores. De aquí, $q = 11C\mathcal{E}/6$.

3.60. Para resolver este problema y una serie de los siguientes conviene representar en el circuito equivalente la batería real, con resistencia interna finita, en forma de batería ideal acoplada en serie con una resistencia igual a la resistencia interna de la batería real (fig. 3.118). En los circuitos que contienen varias fuentes suele ser difícil predecir las direcciones de las corrientes que pasan por las distintas partes del circuito. Por eso, al principio se eligen arbitrariamente dichas direcciones. En nuestro caso por todo el circuito pasa una misma corriente I . Vamos a suponer positiva la dirección en que el circuito es recorrido en el sentido de las agujas del reloj y a elegir el sentido de la corriente I como se muestra en la fig. 3.118. Entonces la diferencia de potencial entre los puntos a y b será

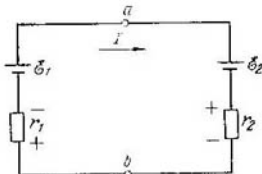


Fig. 3.118.

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 + Ir_2.$$

Esta relación se emplea frecuentemente para resolver los problemas que siguen. Calculemos la corriente en el circuito (fig. 3.118): $I = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2)$. Por consiguiente,

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 / r_1 - \mathcal{E}_2}{1 + r_2 / r_1} = 47 \text{ V}.$$

Este resultado se obtiene utilizando cualquiera de las dos expresiones: $\mathcal{E}_1 - Ir_1$ o $\mathcal{E}_2 + Ir_2$.

Advertimos que cuando $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ la corriente I que se obtiene es positiva. Esto significa que fue acertada la elección del sentido de la corriente. Si el sentido en que la corriente recorre el circuito se hubiera elegido contrario al de las agujas del reloj, el valor de la corriente I habría sido negativo, pero las tensiones previstas en las resistencias internas de las baterías también cambiarían de signo. Las expresiones para $\varphi_a - \varphi_b$ toman respectivamente la forma

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_1 + Ir_1 = \mathcal{E}_1 - |I| r_1,$$

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_2 - Ir_2 = \mathcal{E}_2 + |I| r_2.$$

El sentido verdadero de la corriente en el circuito, lo mismo que el valor verdadero de $\varphi_a - \varphi_b$, no depende, como es natural, del sentido que se elija para el recorrido del circuito, del cual depende la colocación de los signos en las ecuaciones.

3.61. A través del galvanómetro no pasará corriente si la tensión en él, igual a la diferencia de potencial en las baterías, es nula (véase la solución del problema

3.60): $V = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 - Ir_2 = 0$. Como resultado se obtiene que $r_1/r_2 = \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$.

3.62. Teniendo en cuenta que la corriente I que pasa por el galvanómetro es nula, se escribe la expresión de la corriente en el circuito de la batería:

$$I = 2\mathcal{E}/(R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

La tensión V en el galvanómetro también es nula:

$$V = \mathcal{E} - I(R_2 + R_4) = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones obtenidas resulta que $R_1 = R_3 - R_2 + R_4$. Como $R_2 > R_1$ y R_4 puede ser una magnitud negativa, el problema tiene solución si $R_3 \geq R_2 - R_1$.

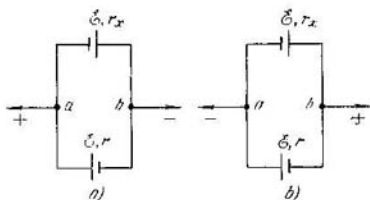


Fig. 3.119.

3.63. La f.e.m. es, por definición, la diferencia de potencial en los contactos de la fuente cuando el circuito externo está abierto, es decir, la diferencia de potencial entre los puntos a y b en la fig. 3.119. (El acoplamiento en serie de las baterías queda excluido, ya que en este caso la f.e.m. puede ser igual a $2\mathcal{E}$).

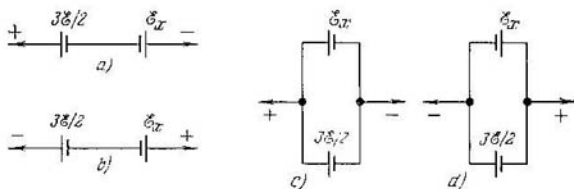


Fig. 3.120.

nula). La polaridad de la fuente formada puede coincidir con la polaridad de la batería cuya resistencia es r (fig. 3.119, a) o con la polaridad de la batería cuya resistencia r_x determinamos (fig. 3.119, b). De acuerdo con esto se obtienen dos valores posibles de la resistencia r_x : a) $r_x = 3r$ y b) $r_x = r/3$.

3.64. Véase la fig. 3.120. a) $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/2$, b) $\mathcal{E}_x = 5\mathcal{E}/2$, c) $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/2$ y d) $\mathcal{E}_x = 7\mathcal{E}/2$.

3.65. Durante la carga del acumulador la corriente dentro de él va del polo positivo al negativo. Por consiguiente, en este caso (véase la solución del problema 3.60) la tensión en los bornes del acumulador es $V_1 = \mathcal{E} + I_1r$. Durante la descarga del acumulador se tiene que $V_2 = \mathcal{E} - I_2r$. Determinando por estas

condiciones $\mathcal{E}$ y r se halla la corriente de corto circuito:

$$I_0 = \mathcal{E} / r = (V_1 I_2 + V_2 I_1) / (V_1 - V_2) = 71,3 \text{ A.}$$

3.66. Escribamos la igualdad de las diferencias de potencial en el generador, en la batería y en la lámpara (con las designaciones de la fig. 3.121): $\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = IR$. Además $I_1 + I_2 = I$. Resolviendo este sistema de ecuaciones resulta

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = 3,65 \text{ A, } I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2} = -1,58 \text{ A.}$$

El valor negativo de la corriente I_2 significa que la corriente pasa por los acumuladores (corriente de carga) en sentido contrario al indicado en la figura.

3.67. $(R_2 + R_3) / R_3 = \mathcal{E}_2 / \mathcal{E}_1$.

3.68. En el caso límite la corriente que pasa por el acumulador es nula. La tensión en los bornes del mismo y la tensión, igual a aquella, en los terminales del generador son iguales a $\mathcal{E}_1$. Se obtiene que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 - I r_2$, de donde la corriente que pasa por el generador es $I = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) / r_2 = 4 \text{ A}$. Como por el acumulador no pasa corriente, por la carga pasa también una corriente igual a 4 A.

3.69. Como la corriente $I_2 = 0$, la tensión en la resistencia r_2 es igual a $\mathcal{E}_2$. La corriente que pasa por esta resistencia, y la corriente I_1 (volvemos a utilizar la condición $I_2 = 0$) son iguales a $\mathcal{E}_2 / r_2$.

3.70. El cálculo directo es bastante complicado. Pero la solución puede simplificarse notablemente utilizando un procedimiento basado en el principio de superposición: en cualquier parte de un circuito la corriente total es igual a la suma algebraica de las corrientes creadas por las distintas fuentes. Con determinadas relaciones entre las f.e.m. de las fuentes $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ se puede conseguir que las corrientes en distintas partes del circuito se anulen. En particular: a) la corriente a través de la batería $\mathcal{E}_1$ es nula si $\mathcal{E}_2 = 4\mathcal{E}_1$; b) la corriente a través de la batería $\mathcal{E}_2$ es nula si $\mathcal{E}_1 = -4\mathcal{E}_2$. Damos al lector la oportunidad de hacer el cálculo correspondiente.

El principio de superposición permite hacer la deducción siguiente. Si en el circuito (fig. 3.33) se varían simultáneamente $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ de manera que $\Delta \mathcal{E}_2 = 4 \Delta \mathcal{E}_1$, esto no hace que varíe la corriente que pasa por la batería $\mathcal{E}_1$. Análogamente, si $\Delta \mathcal{E}_1 = 4 \Delta \mathcal{E}_2$, permanece invariable la corriente que pasa por la batería $\mathcal{E}_2$. De este modo, la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}_2$ hay que disminuirla en el caso a) en 6 V, y en el caso b) en 0,375 V.

3.71. $V_{ab} = 18\mathcal{E}/11$.

3.72. La diferencia de potencial entre los puntos a y b es igual a la caída de tensión en el trozo cd (fig. 3.35): $V_{ab} = \mathcal{E} - IR = 4\mathcal{E}/3$. Es evidente que $V_{ab} = V_C - \mathcal{E}$, donde V_C es la diferencia de potencial, que se busca, en el condensador: $V_C = V_{ab} + \mathcal{E} = 7\mathcal{E}/3 > 0$. Por consiguiente, el potencial en la armadura del condensador unida a las resistencias es más elevado que el potencial de la armadura unida con la batería, es decir, esta armadura está cargada positivamente.

3.73. La resistencia interna de las baterías es insignificante; por lo tanto, las tensiones en las baterías son iguales a sus f.e.m. Considerando el circuito cerrado que incluye $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y R , se ve que la caída de tensión en la resistencia R es igual a $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$; por consiguiente, la corriente que pasa por la resistencia R es igual a $3\mathcal{E}/R$ (y está dirigida de izquierda a derecha en la fig. 3.122). Aplicando razonamientos análogos al circuito cerrado $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ y R_3 se obtiene

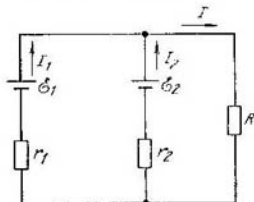


Fig. 3.121.

que la corriente a través de R_3 es igual a $2\mathcal{E}/R$. Ahora, teniendo en cuenta que la tensión en R_3 es igual a $2\mathcal{E}$ y considerando el circuito R_1 , $\mathcal{E}_1$ y R_2 se obtiene la corriente a través de R_1 ; esta corriente es igual a $\mathcal{E}/R$. Las corrientes a través de las baterías pueden hallarse por la condición de que la suma algebraica de las corrientes que pasan por cada nodo es nula. Como resultado se obtiene que la corriente a través de $\mathcal{E}_1$ es igual a $2\mathcal{E}/R$, la corriente a través de $\mathcal{E}_2$, igual a $3\mathcal{E}/R$ y la corriente a través de $\mathcal{E}_3$, igual a cero.

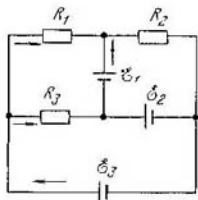


Fig. 3.122.

3.74. La indicación del voltímetro no varía si, estando abierto el interruptor, la tensión en el tramo ab del circuito que incluye la batería $\mathcal{E}_x$ es nula:

$$\mathcal{E}_x = \frac{\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 = 0, \text{ de donde}$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{R_3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{R_1 + R_2}.$$

3.75. Designemos la resistencia del condensador a la fuga por medio de R . Escribamos la ley de Ohm: $\mathcal{E} = I(R + r)$. La tensión en el condensador es $V = IR = \mathcal{E}R/(R + r)$. La resistencia

del condensador $R = \rho d/S$ y su capacidad $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$, donde S es el área de las placas del condensador. De esta relación se obtiene que $R = \epsilon_0 \rho / C$. Y en definitiva

$$E = V/d = \epsilon_0 \mathcal{E} \rho / (\epsilon_0 \epsilon \rho + rC) d.$$

3.76. El resultado obtenido en la solución del problema 3.75 para el condensador plano: $R = \epsilon_0 \rho / C$ puede generalizarse a cualquier sistema. En efecto, una región cualquiera del espacio llena de un dieléctrico conductor puede dividirse, por las superficies equipotenciales próximas, en capas delgadas y éstas, a su vez, en pequeños trozos que pueden ser consideradas como condensadores planos. Para cada condensador de éstos será válida la relación antes dada entre la resistencia y la capacidad. Después, al acoplarlo en serie y en paralelo, las resistencias y las capacidades recíprocas se suman igualmente y, en una sustancia homogénea, la proporcionalidad entre ellas se conserva. Por consiguiente, puede escribirse que $R = \epsilon_0 \rho / C = \epsilon_0 \rho / C_0 = 885 \Omega$, donde C_0 es la capacidad del condensador sin llenar de dieléctrico.

3.77. $F = \epsilon_0 \epsilon I^2 \rho^2 / 2S$.

3.78. Las resistencias de los condensadores a las fugas (véase la solución del problema 3.75) son:

$$R_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \rho_1 / C_1, \quad R_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \rho_2 / C_2.$$

Las caídas de tensión en ellos son, respectivamente:

$$V_1 = \frac{\mathcal{E} C_2 \rho_1 \epsilon_1}{\epsilon_1 C_2 \rho_1 + \epsilon_2 C_1 \rho_2},$$

$$V_2 = \frac{\mathcal{E} C_1 \rho_2 \epsilon_2}{\epsilon_2 C_1 \rho_2 + \epsilon_1 C_2 \rho_1}.$$

3.79. La corriente eléctrica se crea en el metal en virtud de que bajo la acción del campo eléctrico exterior los electrones empiezan a moverse en un sentido determinado. Con esto la corriente $I = \Delta q / \Delta t$, donde Δq es la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del conductor en el intervalo de tiempo Δt . Es evidente que $\Delta q = Ne \Delta t$, siendo N el número de electrones que pasan por la sección transversal del conductor por unidad de tiempo, y e , la carga del electrón.

Consideremos ahora un trozo de nuestro conductor (fig. 3.123). El camino que recorren los electrones con movimiento ordenado en el tiempo Δt es $l = v \Delta t$. Durante el intervalo Δt sólo tienen tiempo de pasar por la sección transversal los electrones que se encuentran en la columna de longitud igual a $v \Delta t$. Teniendo en cuenta que, por la condición del problema, a cada átomo de cobre sólo corresponde un electrón de conducción, se halla el número de átomos que hay en la columna de sección S y longitud $v \Delta t$. El volumen de esta columna es $\Delta V = Sv \Delta t$. Sea Δm la masa de cobre contenida en el volumen ΔV ; entonces el número de átomos que hay en dicho volumen será $\Delta N = N_A \Delta m / A$, donde N_A es la constante de Avogadro. Pero $\Delta m = \rho \Delta V$, siendo ρ la densidad del cobre. Por fin se obtiene que $v = AI / N_A \rho S e = 7 \cdot 10^{-5}$ cm/s.

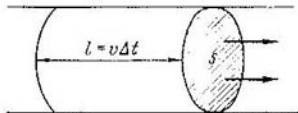


Fig. 3.123.

3.80. Los iones que surgen bajo la acción de los rayos X dentro del condensador empiezan a moverse hacia las placas de éste bajo la acción de la tensión ϕ aplicada. La corriente a través del condensador es $I_C = nev$, donde n es el número de iones (o electrones) que se forman por unidad de tiempo en la unidad de volumen del condensador; e , la carga del ion (igual a la del electrón), y v , el volumen dentro del condensador. Se tiene que $V = V_{ab} + V_{bc} = I_{R_2} R_1 + I_{R_1} R_1$. Además, $I_{R_1} = I_C + I_{R_2}$. De estas ecuaciones se sigue que

$$I_{R_1} = (V + I_C R_2) / (R_1 + R_2) = (V + nevR) / 2R = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ A}.$$

3.81. Basándose en las leyes de Faraday se tiene que $m = AQ/zF$, donde z es la valencia. La cantidad de electricidad $Q = It$; por lo tanto, $m = AIt/zF = 3,4$ g.

3.82. $Q = It = 15$ C y $m = AQ/zF = 5 \cdot 10^{-3}$ g.

3.83. $m = 0,13$ g.

3.84. La masa de níquel que se deposita sobre la superficie del objeto es $m = AQ/zF = 1,65$ g; por otra parte, $m = Spd$. De aquí $d = m/\rho S = 1,53 \times 10^{-3}$ cm.

3.85. Primero se determina la cantidad de gas detonante (en moles): $v = PV/RT$, donde $R = 8,31$ J/(mol·K) es la constante molar de los gases. En la electrólisis del agua el número de átomos de hidrógeno que se desprende es dos veces mayor que el de átomos de oxígeno. La cantidad de hidrógeno $v_1 = 2v/3 = 2PV/3RT$. Teniendo en cuenta que la molécula de hidrógeno tiene dos átomos, valiéndose de las leyes de Faraday se obtiene la carga buscada: $Q = F \cdot 2v_1 = 4FPV/3RT = 5,2 \cdot 10^3$ C.

3.86. $t = 4000$ h.

Trabajo y potencia de la corriente eléctrica.

Ley de Joule—Lenz

3.87. Cuando el conmutador se pasa de la posición 1 a la posición 2, a través de la batería $\mathcal{E}$ pasa cierta carga q . El trabajo de la batería es igual a $\mathcal{E}q$. Este trabajo puede invertirse parcialmente en aumentar la energía almacenada en el condensador y parcialmente en desprendimiento de calor en el circuito. Como puede verse en la fig. 3.39, la carga y, por consiguiente, la energía almacenada en el condensador no varían al hacer la conmutación. Sólo cambian los signos en las armaduras. Por lo tanto, al cambiar de posición el conmutador K , a través de la batería pasará la carga $2C\mathcal{E}$ y en el circuito se desprenderá la cantidad de calor $Q = 2C\mathcal{E}^2$.

3.88. La capacidad de los condensadores acoplados en serie es igual a $2C/3$, la carga que hay en ellos, $q_1 = 2C\mathcal{E}/3$ y su energía, $U_1 = C\mathcal{E}^2/3$. Después de cerrar el interruptor K , el condensador C se carga hasta la tensión $\mathcal{E}$, su carga

se hace $q_2 = C\mathcal{E}$ y su energía es $U_2 = C\mathcal{E}^2/2$. El trabajo de la batería $A = \frac{1}{2}(q_2 - q_1) = C\mathcal{E}^2/3$. La cantidad de calor desprendida será $Q = A - (U_2 - U_1) = C\mathcal{E}^2/6$.

3.89. Inicialmente la energía del condensador era $U_1 = C\mathcal{E}^2/2$. Después que terminó de cargarse, la tensión en el condensador creció hasta $5\mathcal{E}$, y su energía se hizo $U_2 = 25C\mathcal{E}^2/2$. A través de la batería pasó la carga $4C\mathcal{E}$; su trabajo $A = 20C\mathcal{E}^2$. De aquí se halla la cantidad de calor desprendida: $Q = A - (U_2 - U_1) = 8C\mathcal{E}^2$.

3.90. La energía del condensador varía desde $U_1 = 8C\mathcal{E}^2$ hasta $U_2 = C\mathcal{E}^2/2$. Las cargas se mueven contra la acción de la f.e.m. de la batería. Con esto la cantidad de calor desprendida es $Q = A - (U_2 - U_1) = 9C\mathcal{E}^2/2$, donde $A = -3C\mathcal{E}^2$.

3.91. Al conmutar K (fig. 3.43) la capacidad del circuito no varía. (En ambos casos a dos condensadores iguales, acoplados en paralelo, está conectado en serie un condensador de la misma capacidad.) La tensión en el sistema de condensadores también es invariable e igual a $\mathcal{E}$. Por consiguiente, la energía del sistema no varía y todo el trabajo que realiza la batería se convierte en calor. Para calcular este trabajo hay que determinar la carga que pasó por la batería. Esto se hace con más facilidad siguiendo la carga del condensador izquierdo. Antes de la conmutación en este condensador estaba la mitad de la carga del sistema, es decir, $C\mathcal{E}/3$ (la capacidad del sistema es igual a $2C \cdot C/(C + 2C)$). Después de la conmutación la carga se duplica. Por lo tanto, a través de la batería pasa la carga $C\mathcal{E}/3$ y aquélla realiza el trabajo $C\mathcal{E}^2/3$. La cantidad de calor desprendida es $Q = C\mathcal{E}^2/3$.

3.92. $Q = 7C\mathcal{E}^2/16$.

3.93. En el condensador lleno de dieléctrico se encuentra la carga $q_1 = \epsilon C_0\mathcal{E}$, esta misma carga, por la condición del problema, se conserva en el instante inicial en el condensador al quitar el dieléctrico. La energía en dicho instante es $U_1 = q^2/2C = \epsilon^2 C_0\mathcal{E}^2/2$. Al final la carga en el condensador es $q_2 = C_0\mathcal{E}$ y su energía, $U_2 = C_0\mathcal{E}^2/2$. La cantidad de calor desprendida se calcula por el procedimiento ordinario:

$$Q = (\epsilon - 1) C_0\mathcal{E}^2 - (1 - \epsilon^2) C_0\mathcal{E}^2/2 = (\epsilon - 1)^2 C_0\mathcal{E}^2/2 = 2 J.$$

3.94. En la primera variante el trabajo de la batería es $A_1 = 4C\mathcal{E}^2$, la energía del condensador, $U = 2C\mathcal{E}^2$ y el rendimiento $\eta_1 = 1/2$. En la segunda variante, al principio funciona una fuente y realiza el trabajo $A' = C\mathcal{E}^2$, y después, las dos juntas, realizan el trabajo $A'' = 2C\mathcal{E}^2$. El trabajo total es $A_2 = 3C\mathcal{E}^2$, la energía del condensador es la misma que antes y el rendimiento $\eta_2 = 2/3$. La relación entre los rendimientos buscada es $\eta_2/\eta_1 = 4/3$.

3.95. La potencia $N = nC\mathcal{E}^2/2 = 10^{-2}$ W y el rendimiento $\eta = 0.5$.

3.96. Se plantea la ecuación del balance térmico: $cm(t - t_0) = I^2\tau/R$, donde en el segundo miembro figura la cantidad de calor que se desprende en el alambre cuando por él pasa la corriente durante el tiempo τ . Todo este calor se gasta en calentar el alambre (m es la masa de éste). De aquí se halla $\tau = cm(t - t_0)R/I^2$. Pero $R = \rho l/S$, donde l y S son la longitud y la sección del alambre. Además, $m = d\tau S$. En definitiva se tiene que $\tau = c d l^2 \rho / S \times (t - t_0)/I^2 = 7.5$ s.

3.97. En el primer caso ($I_1 = 4$ A) la potencia que cede el acumulador al circuito exterior es $N_1 = I_1^2 R_1$, donde $I_1 = \mathcal{E}/(R_1 + r)$, R_1 es la resistencia de la carga. La corriente en el circuito cambió a causa de la variación de la resistencia de la carga. Con la carga R_2 se tiene que $N_2 = I_2^2 R_2$, donde $I_2 = \mathcal{E}/(R_2 + r)$. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones obtenidas resulta

$$N_2 = [N_1 I_2 - r I_1 I_2 (I_2 - I_1)]/I_1 = 11 \text{ W}.$$

3.98. Designemos la f.e.m. (que se busca) de la batería por $\mathcal{E}$ y la resistencia interna por r . Entonces la potencia que se disipa en la resistencia R_1 es $N = \mathcal{E}^2 R_1/(R_1 + r)^2$. La misma potencia se disipa en la resistencia R_2 : $N = \mathcal{E}^2 R_2/(R_2 + r)^2$. Igualando los segundos miembros de estas ecuaciones se obtiene que $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Y ahora se halla la f.e.m.: $\mathcal{E} = (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) \sqrt{N}$.

Observación. Vamos a examinar más detalladamente los resultados obteni-

dos. Para eso escribamos otra vez la expresión de la potencia N que se disipa en la resistencia R :

$$N = \frac{\xi^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\xi^2}{R + r + r^2/R},$$

de la cual se sigue que tanto si R disminuye como si aumenta ilimitadamente, la potencia desciende hasta cero (fig. 3.124). Por lo tanto, para cierto valor intermedio $R = R_0$ la potencia N debe alcanzar su máximo N_0 . Para todos los demás $R \neq R_0$ a cada $N \neq N_0$ corresponderán dos valores de la resistencia de la carga: R_1 y R_2 ligados entre sí por la relación antes obtenida. Si se supone

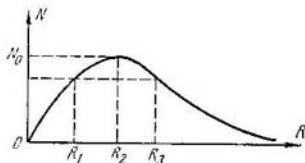


Fig. 3.124.

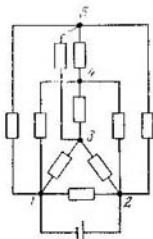


Fig. 3.125.

$R_1 = r$, también deberá ser $R_2 = r$. Evidentemente esto sólo es posible en el punto $N = N_0$. De aquí se sigue una conclusión importante: de una fuente con resistencia interna r se extraerá la potencia máxima únicamente en el caso en que la resistencia de la carga sea también igual a r . Esta potencia máxima es $N_0 = \xi^2/4r$.

3.99. Por analogía con la solución del problema 3.98 se puede escribir que $r = \sqrt{R_1 R_2}$, donde $R_1 = R$ y $R_2 = RR_x/(R + R_x)$, de donde $R_x = r^2 R/(R^2 - r^2)$. Si $R = r$, $R_x \rightarrow \infty$. Esto significa que cualquier R_x finita hace que disminuya la potencia cedida al circuito (véase la observación a la solución del problema 3.98). Es evidente que si $R < r$ el problema no tiene solución.

3.100. Para hacer hervir el agua de la tetera se necesita la energía E . Si se conecta el primer arrollamiento, $E = V^2 t_1 / R_1$, donde V es la tensión en la red; R_1 , la resistencia del primer arrollamiento, y t_1 , el tiempo que tarda en hervir el agua estando conectado dicho arrollamiento. Análogamente, si se conecta el segundo arrollamiento, $E = V^2 t_2 / R_2$. a) Cuando los arrollamientos se conectan en paralelo $E = V^2 t_3 / R_1 + V^2 t_3 / R_2 = V^2 t_3 (1/R_1 + 1/R_2)$ y el tiempo que tarda en hervir el agua es $t_3 = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) = 6$ min. b) Si los arrollamientos se conectan en serie $E = V^2 t_4 / (R_1 + R_2)$ y $t_4 = t_1 + t_2 = 25$ min.

3.101. La potencia que se desprende en la carga es máxima si la resistencia de ésta es igual a la resistencia interna de la fuente (véase la solución del problema 3.98). En estas condiciones en la carga se desprenderá la potencia $N = 16$ W y la potencia máxima del acumulador será $N_0 = 32$ W. El circuito de resistencia $R = 1 \Omega$ formado por los cuatro elementos de 1Ω de resistencia cada uno se puede conseguir acoplándolos de dos en dos en serie y conectando en paralelo las cadenas así formadas (o, al contrario, acoplando los elementos en paralelo y las cadenas, en serie).

Teóricamente puede emplearse un sólo elemento; en este caso se desprenderá la energía máxima posible en el circuito exterior. Pero esto puede ocasionar el recalentamiento del elemento, el cual no tendrá tiempo de ceder el calor y podrá fundirse.

3.102. Analicemos para concretar un circuito con $n = 5$ (fig. 3.125). Supon-

gamos que la batería se conecta a los puntos 1 y 2. Entre estos puntos está intercalada la resistencia r . En paralelo, pasando por el punto 3, está conectada la resistencia $2r$. lo mismo ocurre pasando por el punto 4, y así sucesivamente. El hecho de que los puntos 3 y 4, 3 y 5, 4 y 5 estén unidos entre sí no desempeña papel alguno, ya que al conectar la batería a los puntos 1 y 2 los potenciales de los puntos 3, 4 y 5 serán iguales y, por consiguiente, las resistencias intercaladas entre ellos no ejercen influencia en la resistencia total del circuito.

De este modo, el circuito está formado por la resistencia r y por $n - 2$ resistencias $2r$ acopladas en paralelo con ella. La resistencia total del circuito será

$$R = \frac{1}{1/r + (n-2)/2r} = \frac{2r}{n}.$$

Y la potencia buscada

$$N = I^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{r + R} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 2n}{(n+2)r}.$$

3.103. Sean $\mathcal{E}$ la f.e.m. de la fuente, y r , la resistencia total de la fuente y los conductores. Entonces la corriente de cortocircuito será $I_c = \mathcal{E}/r$. Pero $r = \sqrt{R_1 R_2}$, y $\mathcal{E} = (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) \sqrt{N}$ (véase la solución del problema 3.98). En definitiva se tendrá que $I_c = \sqrt{N/R_1} + \sqrt{N/R_2} \approx 1.63 \text{ A}$.

3.104. La potencia que desarrolla el generador es $N_0 = \mathcal{E}^2/(r + R)$, donde R es la resistencia de la carga. De aquí, $R = \mathcal{E}^2/N_0 - r$. La potencia útil es $N = I^2 R = (N_0/\mathcal{E})^2 (\mathcal{E}^2/N_0 - r)$. Por lo tanto, el rendimiento es $\eta = N/N_0 = 1 - N_0 r/\mathcal{E}^2$.

3.105. La potencia del generador es $N_0 = \mathcal{E}^2/(r + R)$, donde $\mathcal{E}$ es la f.e.m. del generador, y R , la resistencia de la carga. La potencia útil es $N = I^2 R = \mathcal{E}^2 R/(R + r)^2$. Por lo tanto, $\eta = N/N_0 = R/(r + R)$, de donde $R = r\eta/(1 - \eta)$.

3.106. La potencia total que se disipa en el circuito es $N_0 = \mathcal{E}^2/(R + r)$, donde R es la resistencia de la carga, y r , la resistencia de la línea de transmisión y de la fuente. Si $R = R_1$, la potencia de las pérdidas es $N_1 = \mathcal{E}_1^2 r/(R_1 + r)^2$, siendo $\mathcal{E}_1$ la tensión inicial de la fuente. Elevando la tensión hasta $\mathcal{E}_2$ es necesario variar la resistencia de la carga, ya que la potencia que cede el generador debe permanecer constante. Se tiene, pues, que $N_2 = \mathcal{E}_2^2 r/(R_2 + r)^2$. Por la condición del problema

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} \right)^2 \left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r} \right)^2 = 100.$$

La potencia total es igual en ambos casos: $(R_2 + r)/(R_1 + r) = \mathcal{E}_2^2/\mathcal{E}_1^2$. Utilizando esta condición se obtiene que $\mathcal{E}_2^2/\mathcal{E}_1^2 = 100$. Por lo tanto, la tensión debe elevarse 10 veces.

3.107. La diferencia entre las indicaciones de los contadores aumenta a causa de las pérdidas de energía eléctrica en calentar los cables conductores, cuya resistencia es r . Supongamos que la tensión inicial de la fuente sea V_1 y que la corriente en el circuito es igual a I_1 . En este caso la potencia de las pérdidas es $N_1 = I_1^2 r$, siendo $I_1 = N/V_1$, donde $N = 1000 \text{ kW}$ es la potencia total cedida por el transformador. La potencia N_1 puede expresarse por medio de la diferencia entre las indicaciones de los contadores n_1 y n_2 : $N_1 = (n_1 - n_2)/t = \Delta n/t$, donde t es el tiempo en el cual la diferencia entre las indicaciones aumenta en Δn . Cuando se aumenta la tensión hasta V_2 y la corriente en el circuito es I_2 , se tiene una potencia de pérdidas $N_2 = I_2^2 r$, siendo $I_2 = N/V_2$. Este sistema de ecuaciones conduce a la relación $N_2/N_1 = V_1^2/V_2^2$. Teniendo en cuenta la condición $N_2 = 10^{-3} N$, se obtiene que $V_2 = \sqrt{\Delta n/10^{-3} N t} V_1 = 18 \text{ kV}$.

3.108. $V = 26 \sqrt{N r}/5 = 14 \text{ kV}$.

3.109. La caída de tensión en la resistencia R_0 es $V_0 = I R_0/(R + R_0)$, donde R es la resistencia de la carga. Por la condición del problema $V_0 = 0,08V$, de donde $V R_0/(R + R_0) = 0,08V$ o $R = 11,5 R_0$. La potencia cedida

al consumidor es $N = I^2 R / (R + R_0)^2$. Por consiguiente, $R_0 = 11,51 \sqrt{156 N} = 7,4 \Omega$. Como $R_0 = 2 \rho l / S$, la masa de cobre que se necesita para los alambres de esta línea es $M = 2 \rho l S$. Eliminando S de las últimas igualdades se obtiene finalmente que $M = 4 \rho d I^2 / R_0 = 2140 \text{ kg}$.

3.110. $N_R = \mathcal{E}_1 (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) / r = 0,16 \text{ W}$ y $N_r = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)^2 / r = 0,32 \text{ W}$. Al punto c hay que conectar el polo negativo de la batería $\mathcal{E}_2$; $R_{bc} = \mathcal{E}_1 r / (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 100 \Omega$.

3.111. Si se aplica la ley de Ohm: $\mathcal{E} = V + Ir$, es fácil obtener que $I = -2 \text{ A}$. El valor negativo de la corriente indica que por el circuito exterior pasa la corriente en sentido inverso al que pasaría si nuestra batería fuera la única fuente de f.e.m. en el circuito (es decir, de izquierda a derecha en la fig. 3.126). La cantidad de calor que se desprende por unidad de tiempo es $Q = I^2 r = 4 \text{ W}$.

3.112. Como el polo positivo de la batería está conectado al borne negativo del voltímetro, el potencial en el punto b (fig. 3.50) es más alto que en el punto a . Por consiguiente, la tensión V en la ley de Ohm (véase la solución del problema 3.111) debe considerarse magnitud negativa. Entonces $I = (\mathcal{E} + V) / r = 6 \text{ A}$ y $Q = I^2 r = 36 \text{ W}$.

3.113. El desprendimiento de calor por unidad de tiempo depende linealmente de I^2 ; por lo tanto pueden tomarse los valores medios aritméticos, inicial y final, de I^2 . Se obtiene que $Q = (I_0^2 / 2) R t_0 = k^2 I_0^2 R / 2$, donde I_0 es el valor final de la corriente, alcanzado en el instante t_0 . De aquí se tiene que $t_0 = \sqrt{2Q / R k^2} = 6 \text{ s}$.

3.114. $Q = k^2 t^2 / 2R = 200 \text{ J}$.

3.115. La cantidad de calor que se desprende por unidad de tiempo cuando la corriente se hace pasar por el alambre es proporcional al cuadrado de su intensidad: $Q = I^2 R$. Pero la cantidad de calor que cede al espacio circundante es proporcional a la diferencia de temperatura entre el alambre y el aire: $Q' = k (t - t_0)$, donde k es un factor constante en los tres casos que se consideran; t , la temperatura del alambre, y t_0 , la temperatura del aire. Cuando la corriente pasa durante mucho tiempo, se establece el equilibrio térmico: $Q = Q'$. Por lo tanto, para los tres regímenes se tiene

$$I_1^2 R = k (t_1 - t_0), \quad I_2^2 R = k (t_2 - t_0) \quad \text{e} \quad I_3^2 R = k (t_x - t_0).$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene $t_x = 580^\circ \text{C}$.

3.116. Cuando la corriente pasa durante mucho tiempo, el conductor alcanza tal temperatura, que todo el calor que en él se desprende lo cede al espacio circundante. Como en nuestro caso los conductores están conectados en paralelo, la cantidad de calor cedida por unidad de tiempo es inversamente proporcional a la resistencia ($Q = V^2 / R$) y, por consiguiente, al área de la sección transversal. Esto significa que en el alambre grueso se desprende cuatro veces más calor que en el delgado, y su superficie sólo es dos veces mayor que la de éste. Para que la temperatura permanezca constante el alambre grueso debe ceder por unidad de superficie doble cantidad de calor. De aquí se sigue que la diferencia de temperatura entre el alambre grueso y el aire es dos veces mayor que la diferencia de temperatura entre el alambre delgado y el aire y, por consiguiente, la dilatación del alambre grueso es dos veces mayor.

Razonando de un modo semejante se llega a la conclusión de que, si los alambres se conectan en serie, el alargamiento del alambre delgado será ocho veces mayor que el del grueso.

Elementos de característica no lineal en los circuitos de corriente continua

3.117. Cuando la corriente va de A a B , la resistencia del diodo es nula (fig. 3.127, a). El cálculo da el valor de $R_{AB} = 20 \Omega$. Si la corriente pasa en sentido contrario, el diodo equivale a un corte del circuito (fig. 3.127, b). La resistencia $R_{BA} = 82,5 \Omega$.

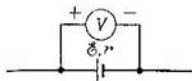


Fig. 3.126.

3.118. Suponiendo que el diodo está cerrado, se obtiene que el potencial del contacto izquierdo del diodo es $V_1 = 75$ V y en el derecho, $V_2 = 66\frac{2}{3}$ V. Pero con esta polaridad de la tensión en el diodo, éste estará abierto y su resistencia será nula. El cálculo (véase la solución del problema 3.56) da que el valor de la corriente a través del diodo es $I = 4$ mA.

3.119. La célula fotoeléctrica está abierta (véase la solución del problema 3.118), es decir, la corriente que pasa por ella es $I_0 = 10$ mA y está dirigida del ánodo al cátodo. Si I_1 es la corriente a través de la resistencia $R_1 = 1$ k Ω , la corriente a través de $R_3 = 3$ k Ω es $I_3 = I_1 - I_0$. La suma de las caídas de

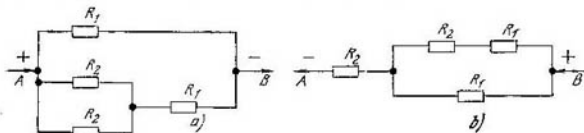


Fig. 3.127.

tensión en R_1 y R_3 es $V = 100$ V, es decir, $I_1 R_1 + (I_1 - I_0) R_3 = V$, de donde se halla que $I_1 = 32,5$ mA y, por lo tanto, $I_3 = 22,5$ mA. El potencial del ánodo es $V_a = 67,5$ V. Análogamente se calcula el potencial del cátodo: $V_c = 46,7$ V. Por consiguiente, la tensión en la célula fotoeléctrica es $V_f = 20,8$ V.

3.120. Por la simetría del problema está claro que las tensiones en las resistencias y en los elementos no lineales son iguales y las corrientes que pasan por ellos también lo son. Por consiguiente, $\alpha I^2 = RI = \mathcal{E}/2$, de donde se obtiene que $\mathcal{E} = 2R^2/\alpha$.

3.121. Cuando el puente está equilibrado la tensión en la resistencia r_1 es $V_1 = \mathcal{E} r_1 / (r_1 + r_2)$ y las tensiones en las resistencias r_1 y R son iguales; por consiguiente, la corriente en la rama superior es $I_1 = V_1/R$. Ahora se igualan las dos expresiones de la tensión en el elemento no lineal: $(I_1/\alpha)^{1/2} = \mathcal{E} r_2 / (r_1 + r_2)$. Resolviendo conjuntamente el sistema de ecuaciones obtenido se halla que $\alpha = r_1 (r_1 + r_2^2) / R \mathcal{E} r_2^2 = 0,0125$ A/V ^{2} .

3.122. La corriente mínima a través de la resistencia R , con la cual el condensador se descarga, debe ser $I = 1$ mA. Pero la caída de tensión en esta resistencia cuando la lámpara está encendida no supera 40 V; por lo tanto, su resistencia no puede ser mayor que $R = 40$ k Ω .

3.123. Mientras la tensión en el tubo no supera V_s , la dependencia de la corriente respecto de la tensión es lineal y el tubo puede considerarse como una resistencia ordinaria $R = V_s/I_0$. Se escribe la ley de Ohm para los dos casos (cuando la resistencia de lastre es R_{l0} , la corriente es igual a I_0 , y cuando la resistencia de lastre es R_l , la corriente es I_s):

$$\mathcal{E} = I_0 (R_{l0} + R + r) \quad \text{y} \quad \mathcal{E} = I_s (R_l + R + r),$$

donde r es la resistencia interna de la fuente. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\Delta R_l = R_l - R_{l0} = \mathcal{E} (1/I_s - 1/I_0) = -2 \cdot 10^8 \Omega.$$

Por lo tanto, la resistencia de lastre debe ser 200 M Ω menor.

3.124. $I = 10$ μ A, $V = 3$ kV.

3.125. Cuando la tensión en el elemento es mayor que V_0 , la dependencia de la corriente I que pasa por el elemento, respecto de la tensión V en él, se puede representar en la forma $I = (V - V_0)/R_0$. La magnitud R_0 suele llamarse resistencia diferencial. En nuestros tres casos se cumple la condición $V > V_0$ por eso

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - V_0 &= I_1 (r + R_1 + R_0), & \mathcal{E} - V_0 &= 2I_1 (r + R_2 + R_0) \\ \text{y } \mathcal{E} - V_0 &= I_x (r + R_0). \end{aligned}$$

donde r es la resistencia interna de la batería, e I_x , la corriente que se busca. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$I_x = I_1 \cdot 2I_1 (R_2 - R_1) / (R_1 I_1 - R_2 \cdot 2I_1) = 2 \text{ mA.}$$

3.126. $\mathcal{E} = V_0 + rI_1 I_2 / (I_1 - I_2) = 150 \text{ V.}$

3.127. La suma de las caídas de tensión en el circuito es igual a la f.e.m. que actúa en él: $\mathcal{E} = IR + A + B/I$. Para la corriente se obtiene la expresión

$$I = \{\mathcal{E} - A \pm [(\mathcal{E} - A)^2 - 4RB]^{1/2}\} / 2R.$$

De aquí resulta que $R \leq (\mathcal{E} - A)^2 / 4B = 20,25 \ \Omega$. Para $R = 8 \ \Omega$ se tienen dos valores posibles de la corriente: $I_1 = 1,25 \text{ A}$ o $I_2 = 10 \text{ A}$. Analicemos estas dos posibilidades (fig. 3.128). La recta que parte del punto $\mathcal{E}$ representa la dependencia de la magnitud $\mathcal{E} - IR$ respecto de la corriente, y la curva, la dependencia de la tensión en el arco, $V = A + B/I$, respecto de la corriente. Las corrientes I_1 o I_2 corresponden a los puntos de intersección de la recta y la curva.

Supongamos que la corriente en el circuito es I_1 . Si, casualmente, la corriente en el circuito disminuye un poco y toma el valor I_1' , la tensión en el arco aumenta bruscamente, la tensión en la resistencia R resulta insuficiente para mantener la corriente I_1' , la corriente disminuye más aún y así sucesivamente hasta que el arco se apaga. Cuando la corriente aumenta casualmente, la tensión en el arco resulta ser tan pequeña que la corriente que pasa por la resistencia R tiene que aumentar, en cuyo caso el proceso termina pasando al régimen correspondiente a la corriente I_2 . Pero si en el circuito se establece la corriente I_2 , las variaciones casuales de ésta hacen que se compensen las perturbaciones. Por ejemplo, si la corriente aumenta un poco, la tensión en el arco disminuye en una magnitud tan pequeña, que la tensión que persiste en la resistencia R resulta insuficiente para mantener el nuevo valor de la corriente y ésta disminuye. Así, el estado en que la corriente en el circuito es $I_1 = 1,25 \text{ A}$ es inestable; en el circuito se establece la corriente $I_2 = 10 \text{ A}$.

3.128. La característica tensión-intensidad tiene cualitativamente la misma forma que la característica del arco considerada en el problema 3.127. Para resolver el problema hay que construir desde el punto $I = 0, V = 85 \text{ V}$ una recta tangente a la curva representada en la fig. 3.60. Esta recta da la dependencia de $\mathcal{E} - IR$ respecto de la corriente para el valor límite de la resistencia R . Por la inclinación de la recta se determina $R = 4,6 \ \Omega$.

3.129. Los puntos de la característica del circuito correspondientes al valor de $V = \mathcal{E} = 80 \text{ V}$ dan dos valores posibles de la corriente: $I_1 = 2,5 \text{ A}$ e $I_2 = 17,5 \text{ A}$. El análisis demuestra (véase la solución del problema 3.127) que el régimen estable es el de corriente I_2 .

Construyamos la característica tensión-intensidad del arco sin resistencia de lastre. Para eso, por la parte de la característica correspondiente a las corrientes más altas, se traza la recta AB (fig. 3.129). Luego, por el origen de coordenadas, se traza la recta OC paralela a la AB . La distancia vertical (en voltios) desde OC hasta la característica del arco junto con la resistencia, da la característica tensión-intensidad del arco propiamente dicho. Esta resulta ser igual que la representada en la fig. 3.60. En adelante el curso de la solución coincide con la del problema 3.128. La resistencia máxima resulta ser $R = 3,8 \ \Omega$.

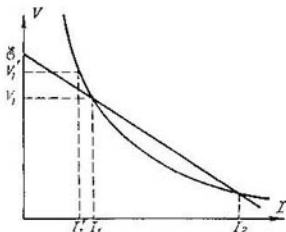


Fig. 3.128.

3.130. La corriente a través de la carga es constante e igual a $I_c = 15$ mA. Como la corriente a través del tubo estabilizador de tensión I_e varía desde 5 hasta 15 mA, la corriente total que pasa por la resistencia R varía entre los límites de $I_{\min} = 20$ mA a $I_{\max} = 30$ mA. Se escribe la ley de Ohm para los regímenes límites de funcionamiento del tubo estabilizador de tensión ($V = 150$ V es la tensión en la carga):

$$1,18 - V = RI_{\max} \quad \text{y} \quad 0,03 - V = RI_{\min}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen

$$\mathcal{E} = \frac{V(I_{\max} - I_{\min})}{0,9I_{\max} - 1,1I_{\min}} = 300 \text{ V} \quad \text{y} \quad R = \frac{1,18 - V}{I_{\max}} = 6 \text{ k}\Omega$$

3.131. Se construye la característica en carga de la resistencia r , es decir: la dependencia de la tensión en la resistencia respecto de la corriente en ella,

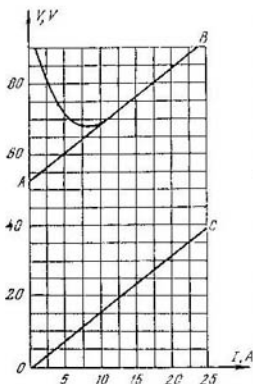


Fig. 3.129.

$V = \mathcal{E} - Ir$. Esta será una recta que pasa por los puntos $I = 0,4$ A, $V = 0$ e $I = 0$, $V = 4$ V (fig. 3.63, a). La intersección de esta recta con la característica de la lamparita da el valor de la corriente en el circuito que incluye la resistencia r y la lamparita, $I = 0,24$ A y la tensión en la lamparita $V = 1,6$ V. La tensión en la resistencia es $V = 2,4$ V. Respectivamente, el cursor del potenciómetro debe dividir la resistencia total R de forma que entre los puntos A y B sea nula la tensión. Por consiguiente, la parte superior, en la fig. 3.63, b, del potenciómetro debe tener una resistencia de 24Ω .

Se traza la tangente a la característica de la lamparita en el punto de trabajo ($I = 0,24$ A, $V = 1,6$ V). Su inclinación determina en primera aproximación la relación entre la corriente y la tensión en la lamparita. Por la gráfica se obtiene que $\Delta V/\Delta I = 12,6 \Omega$. Esta magnitud recibe el nombre de resistencia diferencial de la lamparita: $r_d = 12,6 \Omega$. La variación de la tensión entre los puntos A y B será mínima si el puente está equilibrado por la resistencia diferencial (para las resistencias lineales $\Delta V/\Delta I = V/I$, es decir, las resistencias ordinaria, integral y diferencial coinciden). Para la resistencia de

la parte superior del potenciómetro se obtiene que $Rr/(r + r_d) = 17,7 \Omega$. Se recomienda al lector que analice detalladamente la condición de equilibrio diferencial del puente.

3.132. Escribamos la ley de Ohm para el circuito con elemento no lineal: $\sqrt{I/k} + RI = \mathcal{E}$, donde $k = 0,01$ A/B². Resolviendo esta ecuación se obtiene que $I = 0,1225$ A. Entonces la tensión en el elemento no lineal es $V = 3,5$ V. Se calcula la potencia de las pérdidas térmicas en el elemento no lineal: $N = IV = 0,43$ W. Advertimos que para el elemento no lineal el concepto de resistencia no existe en el sentido ordinario, es decir, como relación V/I . Por eso las fórmulas para calcular la cantidad de calor $Q = I^2R$ y $Q = V^2/R$ no pueden aplicarse.

3.133. $N = 8,3$ W.

3.134. Por medio de una construcción como la descrita en la solución del problema 3.131, se halla la tensión en la lamparita y la corriente que pasa por ella: $V = 5,5$ V e $I = 1,1$ A. Por lo tanto, la potencia de la lamparita es $N = IV = 6$ W. Redondeamos deliberadamente el resultado porque los valores de

la corriente y de la tensión que pueden obtenerse de la gráfica: no son muy exactos. Esto se refiere también a una serie de problemas cuyas gráficas se dan (véanse los problemas 3.128, 3.129 y 3.131). Por eso el lector no debe extrañarse si las respuestas numéricas a estos problemas difieren algo de las que se dan en el libro.

3.135. En el segundo experimento la temperatura del elemento es $t_3 = 80^\circ\text{C}$; por consiguiente, su resistencia es $R_3 = 50\ \Omega$. De la ecuación del balance térmico se puede calcular el coeficiente de proporcionalidad entre la cantidad de calor que se desprende en la unidad de tiempo y la diferencia de temperatura:

$$\alpha = I^2/R_3(t_3 - t_0) = 1,2\ \text{W/K}.$$

Las oscilaciones de la corriente en el circuito, que se producen en el tercer experimento, se deben a las oscilaciones de la temperatura entre los valores t_2 y t_1 y las respectivas oscilaciones de la resistencia. Con esto la cantidad de calor cedida en la unidad de tiempo es $q = \alpha(\bar{t} - t_0) \approx 95\ \text{W}$, donde $\bar{t}$ es la temperatura media del elemento en el experimento ($t_1 > \bar{t} > t_2$). Por la relación entre la cantidad de calor que se desprende en el elemento y la cantidad de calor que cede al aire se determina el tiempo τ_1 que tarda en calentarse desde 99 hasta 100°C , el tiempo de enfriamiento τ_2 y el período T de las oscilaciones, igual a la suma de aquéllos:

$$T = \tau_1 + \tau_2 = \frac{C}{I^2/R_1 - \alpha(\bar{t} - t_0)} + \frac{C}{\alpha(\bar{t} - t_0) - I^2/R_2} \approx 0,2\ \text{s}.$$

La corriente en el circuito toma los valores $I_{\text{máx}} = 1,6\ \text{A}$ e $I_{\text{mín}} = 0,8\ \text{A}$.

Partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético

3.136. La condición de equilibrio de la gotita es $mg = 2eE$, donde $m = 4\pi r^3 \rho / 3$ es la masa de la gotita; e , la carga del electrón, y $E = V/d$, la intensidad del campo dentro del condensador. De aquí se obtiene $e = 4\pi r^3 \rho g d / (3 \cdot 2V) = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$.

3.137. La tensión con la cual la gotita se encuentra en equilibrio es $V = 4\pi r^3 \rho d_1 g / 9e = 4350\ \text{V}$ (véase la solución del problema 3.136).

a) Si las placas se separan estando conectadas a la fuente de tensión (es decir, siendo $V = \text{const}$), la intensidad del campo dentro del condensador disminuye, ya que $V = E_1 d_1 = E_2 d_2$ y $E_2 = E_1 d_1 / d_2$, donde $d_2 > d_1$. La fuerza eléctrica que actúa sobre la gotita, $F = 3eE$, viene determinada por la intensidad del campo; por consiguiente, esta fuerza disminuye y la gotita empieza a caer.

b) Si las placas se separan estando desconectadas de la fuente de tensión, la carga del condensador se conserva: $q = \text{const}$. En este caso se conserva también la intensidad del campo eléctrico, puesto que ésta depende de la carga del condensador y no de la distancia entre las placas. El equilibrio de la gotita no se altera.

3.138. $v = (2ZeV/Am_p)^{1/2} = 4,1 \cdot 10^3\ \text{m/s}$, donde $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$ es la masa del protón.

3.139. Como entre las placas A y D la diferencia de potencial es $V_{AD} = 0$, la energía cinética resultante, con la cual el electrón llega a la placa D , también es nula. Por consiguiente, la velocidad $v_D = 0$. Las velocidades v_B y v_C son fáciles de calcular basándose en la ley de conservación de la energía: $v_B = (2eV_{AB})^{1/2} = 8,4 \cdot 10^6\ \text{m/s}$ y $v_C = 6 \cdot 10^6\ \text{m/s}$.

3.140. Se halla el desplazamiento vertical h del electrón dentro del condensador y la velocidad vertical v_y al salir lanzado de él. Teniendo en cuenta que $T = mv_x^2/2$, se obtiene que $h = eVt^2/4dT$ y $v_y = eVt/mdv_0$. Cuando sale del condensador, el electrón va lanzado en línea recta por inercia. El ángulo θ

entre las placas y la dirección de la trayectoria del electrón (fig. 3.68) se determina por la relación $\operatorname{tg} \theta = v_y/v_0 = eVl/2dT$. El desplazamiento adicional es $S = L \operatorname{tg} \theta = eVlL/2dT$, de donde

$$x = h + S = \frac{eVl}{2dT} \left(\frac{l}{2} + L \right) = 0,5 \text{ cm.}$$

Como en esta expresión no figura la masa de la partícula y la carga del protón es igual (en módulo) a la del electrón, el desplazamiento del protón será igual al del electrón, pero en sentido opuesto.

3.141. Hacia abajo la partícula de polvo se mueve uniformemente con la velocidad $v_0 = dl/t_0$; por lo tanto, la fuerza de gravedad mg está equilibrada por la fuerza de resistencia del aire αv_0 . Cuando la partícula de polvo se mueve hacia arriba, además de la fuerza de gravedad mg y de la fuerza de resistencia del aire $\alpha v = \alpha dl/t$, actúa sobre ella una fuerza por parte del campo eléctrico, qV/d , en la que q es la carga de la partícula de polvo; $\alpha v + mg = qE$. Como resultado se obtiene que

$$\gamma = q/m = g(1 + t_0/t) d/V = 3 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg.}$$

$$3.142. q = mgd^2/2eV = 10^{-17} \text{ C.}$$

$$3.143. I = em_e N_A/A = 24 \text{ A y } N = IV = 24 \text{ kW.}$$

3.144. A medida que los electrones se depositan en la segunda placa, el condensador se carga y su campo dificulta el movimiento de los electrones siguientes. La corriente fotoeléctrica cesa cuando toda la energía cinética del electrón se gasta en trabajo contra las fuerzas del campo eléctrico; $mv^2/2 = eV$, donde V es la diferencia de potencial entre las placas con la cual se interrumpe la corriente fotoeléctrica. Pero $V = Ed = qd/\epsilon_0 S$, siendo q la carga del condensador en el instante en que cesa la corriente fotoeléctrica. La carga del condensador está ligada con el número de electrones que llegan a la placa en la unidad de tiempo por la relación $q = entS$. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones obtenidas, resulta que $t = \epsilon_0 mv^2/2e^2nd = 1,56 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$

$$3.145. \mathcal{E} = v_0^2/2\gamma = 5 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

3.146. Se determina la f.e.m. de los elementos:

$$\mathcal{E}_1 = T_1/2e = 10 \text{ kV y } \mathcal{E}_2 = T_2/2e = 20 \text{ kV,}$$

donde $2e = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ es la carga de la partícula α . a) Cuando los elementos están acoplados en serie, la f.e.m. de la batería es igual a la suma de las fuerzas electromotrices de aquéllos, es decir, a 30 kV. b) Cuando los elementos están acoplados en paralelo, la f.e.m. de la batería es igual a 20 kV; en este caso uno de los elementos queda ya bloqueado a la tensión de 10 kV y sólo funcionará el elemento en el cual la fuente emite partículas α de energía más alta.

3.147. La energía potencial de las dos cargas iguales que interaccionan es $U = q^2/4\pi\epsilon_0 r$, donde r es la distancia entre las cargas. La fuerza de interacción entre los protones es máxima cuando toda su energía cinética se convierte en potencial: $U = T$. Entonces, aplicando la ley de Coulomb, se halla que $F = 4\pi\epsilon_0 T^2/q^2 = 110 \text{ N.}$

3.148. Por razones de simetría está claro que la partícula α se queda en su sitio y que la energía potencial de la interacción de las tres partículas se transforma en energía cinética de los protones:

$$2 \cdot \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2a} = mv^2, \quad v = \left(\frac{9e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \right)^{1/2} = 800 \text{ m/s.}$$

3.149. Las partículas deben encontrarse en una misma línea de intensidad. Las fuerzas (fig. 3.130) son:

$$f = qQ/4\pi\epsilon_0 d^2, \quad F_1 = qE \quad \text{y} \quad F_2 = QE.$$

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de los cuerpos se tiene:

$$ma = -qE + qQ/4\pi\epsilon_0 d^2, \quad Ma = QE - qQ/4\pi\epsilon_0 d^2,$$

de donde se infiere que $a = (Q - q) E / (m + M)$. Esta expresión de a hubiera podido escribirse inmediatamente, tomando en consideración que el sistema de las dos cargas se mueve como un todo único en el campo de intensidad E . Advertimos que esta configuración de las cargas es inestable y, si se produce casualmente una pequeña desviación de ella, las partículas chocan o se despiden. La distancia buscada es

$$d = [(mQ + Mq) qQE / 4\pi\epsilon_0]^{1/2}.$$

3.150. En la posición de equilibrio estable el dipolo está orientado a lo largo de la dirección del campo, de manera que la carga $+q$ está desplazada en el sentido de la línea de intensidad (fig. 3.131). Cuando el dipolo se hace girar

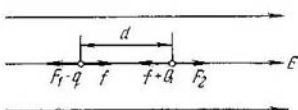


Fig. 3.130.

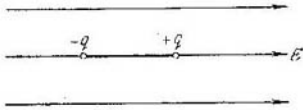


Fig. 3.131.

180° las cargas cambian de lugar entre sí. Para esto hay que realizar el trabajo $A = A^- + A^+ = -(-q) El + qEl = 2qEl$.

3.151. $A = lqQ \sin \alpha / \epsilon_0 S$.

3.152. La componente de la velocidad del electrón paralela al plano de la rejilla no cambiará. La componente de la velocidad perpendicular a la rejilla se anulará a la distancia h de ésta. Aplicando la ley de conservación de la energía resulta que $h = \frac{v^2 \cos^2 \alpha \cdot d}{2\gamma V} = 5 \text{ mm}$.

3.153. $T \geq 4qV$.

3.154. $\alpha \geq 30^\circ$.

3.155. $\alpha = 15^\circ$.

3.156. Para desprenderse de la bolita, el electrón tiene que realizar el trabajo $eQ/4\pi\epsilon_0 r$. Por lo tanto, la reserva de energía cinética del electrón no debe ser menor que esta magnitud; de lo contrario, después de apartarse cierta distancia de la bolita, el electrón se para y, bajo la influencia de la atracción por parte de ésta, retorna a ella. De aquí se obtiene la condición para la carga máxima:

$$eQ/4\pi\epsilon_0 r = mv^2/2 \quad \text{o} \quad Q = 4\pi\epsilon_0 v^2 r / 2\gamma.$$

3.157. Por la ley de conservación de la energía se tiene que $mv^2/2 - mc_0^2/2 = -eV$, donde $V = -Q/4\pi\epsilon_0 r$ es el potencial de la esfera, de donde $v_0 = (v^2 + 2\gamma Q/4\pi\epsilon_0 r)^{1/2}$.

3.158. Para ionizar el átomo de neón el electrón, en el recorrido libre l , debe adquirir la energía U . Entonces comienza la descarga en alud, es decir, el tubo se enciende. Por consiguiente, la tensión buscada es $V = Udl/e = 216 \text{ V}$.

3.159. Como se sigue de la fig. 3.75, la intensidad del campo es máxima al principio y al final del tubo e igual a $E = 3.5 \text{ kV/cm}$. De aquí puede determinarse el recorrido libre (véase la solución del problema 3.158): $l = 7.5 \times 10^{-5} \text{ m}$.

3.160. $V = 14.7 \text{ kV}$.

3.161. Sobre la partícula en el campo eléctrico actúa la fuerza qE , en la que q es la carga de la partícula, y E , la intensidad del campo en el punto en que se encuentra aquélla. Por razones de simetría está claro que la intensidad del campo es igual en todos los puntos de la trayectoria y está dirigida perpendicularmente a la velocidad.

La carga del protón es igual (en módulo) a la carga e del electrón; su masa la designaremos por m_p . Entonces, en el caso del movimiento del protón por

una circunferencia, la intensidad E_1 del campo debe satisfacer la condición $eE_1 = m_p v^2/R$. La carga de la partícula α (núcleo del átomo de He) es igual a $2e$, y su masa, igual a $4m_p$. Por lo tanto, para que la partícula se mueva por una circunferencia se necesita una intensidad E_2 del campo que satisfaga la condición $2eE_2 = 4m_p v^2/R$. De estos razonamientos se obtiene que $E_2/E_1 = 2$.

3.162. La carga por unidad de área del flujo es $\sigma = nde$, donde d es la anchura de la rendija (y del flujo). En la superficie del flujo surge un campo eléctrico de intensidad $E = \sigma/2\epsilon_0$. Los electrones externos que se encuentran en este campo reciben la aceleración $a = eE/m$. En el tiempo $t = dl/v$ (donde l es la distancia de la rendija que se busca) estos electrones se desplazan en dirección transversal una distancia $d/2$, es decir, $at^2/2 = d/2$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido resulta que $t = \frac{v}{c} \left(\frac{2F_{nm}}{v} \right)^{1/2} = 2.5 \text{ cm}$.

3.163. Para que el electrón pueda llegar hasta un punto $x = 1.5 \text{ mm}$ su energía inicial debe ser $eV_m = 2.25 \text{ eV}$. Considerando el movimiento del electrón como uniformemente retardado durante el recorrido $l_1 = 1.5 \text{ mm}$, y luego como uniformemente acelerado (después de pasar el punto de potencial mínimo V_m) durante el recorrido $l_2 = 12 \text{ mm}$, se obtiene el tiempo de tránsito

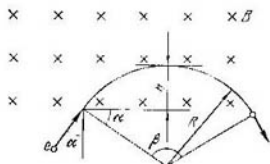


Fig. 3.132.

$$\tau = \sqrt{\gamma^2 - 1} (l_1 / \sqrt{V_m} + l_2 / \sqrt{V_m + V_a}) \approx 10^{-2} \text{ s}.$$

3.164. Los potenciales del ánodo y del cátodo son iguales; por consiguiente, la energía del electrón desprendido del cátodo es igual a su energía en el ánodo. El cálculo da que $\tau = 4.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

3.165. Si la velocidad de la partícula cargada que se mueve en el campo magnético es perpendicular a las líneas de inducción del campo, la fuerza de

Lorentz es igual a $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ y está dirigida perpendicularmente a la velocidad y a las líneas de inducción. En este caso la partícula se mueve por una circunferencia cuyo radio R puede determinarse por la segunda ley de Newton: $mv^2/R = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. En las condiciones de nuestro problema la partícula recorre, por una región en que existe un campo magnético, la parte de la circunferencia (fig. 3.132) correspondiente al ángulo $\beta = 120^\circ$. La profundidad de penetración es $h = R(1 - \sin \alpha) = \frac{v}{\gamma B}(1 - \sin \alpha) = 28 \text{ mm}$.

3.166. La componente de la velocidad $v \cos \alpha$, dirigida a lo largo del campo magnético, permanece invariable. En la proyección sobre el plano perpendicular a la inducción del campo, el electrón describe una circunferencia (véase la solución del problema 3.165). Este electrón pasará por el punto C si en el tiempo que tarda en desplazarse la distancia L a lo largo de las líneas de inducción describe un número entero de circunferencias. Tomando esto en consideración se obtiene que $B = k \cdot 2\pi \frac{mv}{eL} \cos \alpha$, donde k es un número entero arbitrario.

3.167. $T = e^2 B^2 (r^2 + R^2) / 2m_p$.

3.168. $T = 3e^2 B^2 r^2 / 4m_p$. Recordamos que la masa de la partícula α es $4m_p$.

3.169. Aplicando la segunda ley de Newton $mv^2/R = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ y la condición de sincronización $2\pi R/v = 1/f$, puede determinarse la razón de la carga q de la partícula a su masa m : $\gamma = q/m = 2\pi f/R$. Utilizando la relación entre la corriente y el número de partículas que pasan en la unidad de tiempo, $I = nq$, se escribe la potencia del haz: $N = nmc^2/2 = \pi f B R^2 I$. La condición de balance térmico tiene la forma $N = cM_f \Delta t$, en la que $c = 4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ es el calor específico del agua. De aquí, la elevación buscada de la temperatura del agua es $\Delta t = \pi B I R^2 / c M_f = 5.6 \text{ K}$.

3.170. En régimen estacionario la fuerza magnética $e v B$ que actúa sobre los electrones libres del conductor se compensa con la fuerza eléctrica $e V/d$, de donde $v = V/Bd = 2$ m/s.

3.171. La energía total del electrón en el átomo es $E = mv^2/2 - e^2/4\pi\epsilon_0 r$, donde m es la masa del electrón. La condición para que éste gire por una órbita de radio r en: $mv^2/r = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, de donde

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad E_1 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}, \quad E_2 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_2} \quad (E_1 < E_2).$$

La energía del fotón es

$$E_f = E_2 - E_1 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

3.172. La ionización se produce si la energía total del electrón toma el valor cero; por consiguiente (véase la solución del problema 3.170), $r = e^2/8\pi\epsilon_0 E = 5,3 \cdot 10^{-9}$ cm.

3.173. El tiempo de tránsito de los electrones entre los electrodos de la lámpara es $\tau = (2d^2/\gamma V)^{1/2} = 2,5 \cdot 10^{-10}$ s. El amplificador no introduce deformaciones si durante el movimiento del electrón no varía prácticamente la tensión. Para esto es necesario que el período de la tensión de entrada T sea grande en comparación con el tiempo de tránsito τ del electrón: $f = 1/T \leq 1/\tau = 4 \cdot 10^9$ Hz. La inercia de los electrones empieza a manifestarse en las frecuencias del orden de 10^9 Hz.

3.174. El potencial de la rejilla 3, por la condición del problema (fig. 3.83), es igual que el potencial de la rejilla 1; por consiguiente, el electrón acelerado por el campo entre las rejillas 1 y 2, durante su recorrido hacia la rejilla 3 se decelera, retrocede y empieza a oscilar entre las rejillas 1 y 3 (el ion positivo de nitrógeno será expulsado del espacio entre las rejillas 1 y 3). Como el movimiento del electrón no es sinusoidal, emitirá todo un espectro de ondas electromagnéticas, pero, en este espectro, la longitud de onda máxima corresponderá al período completo de las oscilaciones del electrón. Si c es la velocidad de las ondas electromagnéticas (velocidad de la luz), será $\lambda = cT$. Evidentemente, el período T es cuatro veces mayor que el tiempo de tránsito de los electrones desde la rejilla 1 hasta la rejilla 2. Como la aceleración y el tiempo que dura el movimiento en este espacio son:

$$a = eV/mL \quad \text{y} \quad t = T/4 = (2L/a)^{1/2} = L(2m/eV)^{1/2},$$

para λ se obtiene definitivamente que $\lambda = 4cL(2m/eV)^{1/2} \approx 3,6$ m.

Para que el ion de nitrógeno empiece a moverse entre las rejillas 1 y 3 y emita ondas de longitud λ es necesario invertir el signo del potencial V_2 y conseguir que la relación m_2/qV siga siendo la misma que para el electrón.

Inducción electromagnética. Corriente alterna

3.175. Supongamos que por el circuito del galvanómetro pasa la carga en el intervalo de tiempo Δt . Durante este tiempo el flujo magnético a través de la bobina varía desde $\Phi = BS_n$ hasta cero. Por la ley de Ohm $\mathcal{E} = IR$ y, de acuerdo con la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t = BS_n/\Delta t, \quad I = q/\Delta t; \quad \text{por lo que} \quad R = qR/S_n.$$

Observación. Al resolver el problema se ha supuesto que el flujo magnético disminuye uniformemente con el tiempo. Sin embargo no es difícil demostrar que en realidad el resultado no depende de la ley por la cual varíe el flujo. Damos al lector la oportunidad de demostrar esta afirmación.

3.176. Al girar la espira, en ella surge una f.e.m. inducida $\mathcal{E}$. Basándose en la ley de Faraday $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$, donde $\Delta\Phi$ es la variación del flujo magné-

tico a través del plano de la espira, que se produce durante el tiempo Δt . Por otra parte, por la ley de Ohm, $\mathcal{E} = IR = R\Delta Q/\Delta t$, donde ΔQ es la carga que pasa por la sección transversal del conductor, de que está hecha la espira, durante el tiempo Δt . De estas relaciones se obtiene que $\Delta Q = -\Delta\Phi/R$.

En el instante inicial, en que el plano de la espira era perpendicular a las líneas de inducción del campo magnético, el flujo magnético que atravesaba el plano de la espira era $\Phi_1 = BS$. Después de girar la espira el ángulo α , el flujo magnético fue $\Phi_2 = BS \cos \alpha$. Por consiguiente, $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -BS(1 - \cos \alpha)$ y $\cos \alpha = 1 - RQ/BS = -0.5$, de donde $\alpha = 120^\circ$ (véase también la observación a la solución del problema 3.175).

3.177. La carga que pasa por la espira es proporcional a la variación del flujo magnético que atraviesa dicha espira. Por la condición del problema, al principio estaba ausente el campo magnético; por consiguiente, la variación del flujo magnético al conectar el campo es igual simplemente al flujo Φ que atraviesa la espira cuando se conecta el campo.

La variación del campo cuando se da a la espira la forma de «ocho» depende de cual de los tres posibles procedimientos se emplea para hacer el «ocho»

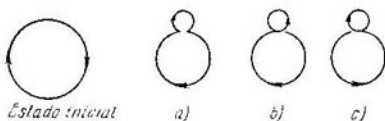


Fig. 3.133.

(fig. 3.133). Teniendo en cuenta que en los lazos vueltos hay que atribuir al flujo signos contrarios, para los tres casos se obtienen las relaciones siguientes:

a) la espira se ha «comprimido»

$$\Phi_1 = 5\Phi/8, \quad \Delta\Phi_1 = -3\Phi/8 \quad \text{y} \quad Q_1 = -3Q/8;$$

b) se ha vuelto el lazo menor

$$\Phi_2 = \Phi/2, \quad \Delta\Phi_2 = -\Phi/2 \quad \text{y} \quad Q_2 = -Q/2;$$

c) se ha vuelto el lazo mayor

$$\Phi_3 = -\Phi/2, \quad \Delta\Phi_3 = -3\Phi/2 \quad \text{y} \quad Q_3 = -3Q/2.$$

El signo menos indica en los tres casos que, en las partes no vueltas de la espira, el sentido en que pasa la carga es contrario al que seguiría al conectar el campo magnético.

3.178. $q = CS\Delta B/\Delta t = 5 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$

3.179. $N = (\Delta B/\Delta t)^2 S^2 n^2/R = 10^{-7} \text{ W.}$

3.180. El puente divide el cuadro en dos circuitos y si dicho puente se mueve, el flujo magnético a través de ambos circuitos varía y en los dos se induce f.e.m. Como el flujo magnético a través del circuito derecho disminuye y a través del izquierdo aumenta con la misma velocidad, las fuerzas electromotrices inducidas son iguales en módulo y tienen signos distintos respecto del sentido dado de recorrido de los circuitos (fig. 3.134): $|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2| = \Delta\Phi/\Delta t$. Como el campo magnético es continuo, la variación del flujo magnético $\Delta\Phi = B\Delta S = BL\Delta x$. Así, $|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2| = BL\Delta x/\Delta t = BLv$, donde v es la velocidad del movimiento del puente. Para la corriente se obtienen dos ecuaciones coincidentes: $I = |\mathcal{E}_1|/R_1 = |\mathcal{E}_2|/R_2 = BLv/R$.

3.181. El puente ab se mueve hacia abajo con velocidad constante; por consiguiente, la fuerza de gravedad está equilibrada por la fuerza que actúa sobre el puente por parte del campo magnético: $mg = F$ (fig. 3.135). Determinemos la fuerza F . Al moverse el puente, en el circuito $abcd$ se induce la f.e.m.

$\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. La potencia de las pérdidas térmicas es $N = \mathcal{E}^2/R$. De acuerdo con la ley de conservación de la energía $N = Fv$ o $F = \mathcal{E}^2/Rv$. Pero $\mathcal{E} = -BL \Delta x/\Delta t = -BvL$. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que $R = B^2 L^2 v/mg = 2,55 \cdot 10^{-3} \Omega$.

$$3.182. F = B^2 l^2 v/R = 2 \cdot 10^{-12} \text{ N.}$$

3.183. En régimen estacionario la componente horizontal de la velocidad es igual a la velocidad inicial v_0 y la componente vertical v_y puede hallarse por la condición de igualdad de la fuerza de gravedad mg y la fuerza magnética F . Cuando el cuadro se mueve surge en él la f.e.m. inducida $\mathcal{E} = kv_y a^2$,

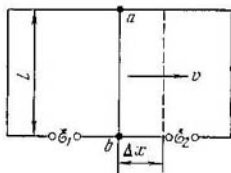


Fig. 3.134.

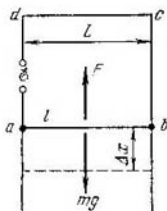


Fig. 3.135.

y, a causa de esto, pasa la corriente $I = \mathcal{E}/R$. La fuerza F aparece en virtud de la diferencia entre los valores de la inducción magnética en las proximidades de los lados superior e inferior del cuadro:

$$F = Ia \{ (B_0 + kz + ka) - (B_0 + kz) \}.$$

De las ecuaciones obtenidas se halla la componente vertical de la velocidad: $v_y = mgR/k^2 a^4$. La velocidad inicial buscada es

$$v_0 = [v^2 - (mgR/k^2 a^4)^2]^{1/2}.$$

3.184. Escribamos la ley de Ohm para el circuito del solenoide: $-L \Delta I/\Delta t = IR$, donde I es la corriente en el solenoide y ΔI , la variación de dicha corriente en el tiempo Δt . Como la inducción del campo magnético en el solenoide es proporcional a la corriente, las variaciones de estas magnitudes en un mismo tiempo también resultan ser proporcionales:

$$B = \alpha I, \quad \Delta B = \alpha \Delta I \quad \text{y} \quad \Delta B/B = \Delta I/I.$$

Por eso

$$R = -L \Delta I/I \Delta t = -L \Delta B/B \Delta t = 5,6 \cdot 10^{-6} \Omega.$$

Al sustituir las magnitudes por los datos numéricos se ha tenido en cuenta que la variación relativa del campo magnético durante el tiempo $\Delta t = 3600 \text{ s}$ es $\Delta B/B = -2 \cdot 10^{-2}$. El signo menos indica que la inducción del campo disminuye.

3.185. A través de la resistencia R sólo pasa corriente en el proceso de establecimiento, en el que la corriente I_1 se transforma en la inductancia L . En este período de tiempo, en la bobina y, por consiguiente, también en la resistencia, existe una tensión igual a la f.e.m. inducida $\mathcal{E}_1 = -L \Delta I_1/\Delta t$. La corriente I_2 a través de la resistencia R es la carga que pasa por ella en la unidad de tiempo: $\Delta q/\Delta t = I_2 = \mathcal{E}_1/R$. Se obtiene la relación $R \Delta q = -L \Delta I_1$. La corriente I_1 varía durante el tiempo de establecimiento desde cero hasta $\mathcal{E}/r$. Por consiguiente, la carga buscada es $q = -L \mathcal{E}/Rr$ (véase también la observación a la solución del problema 3.175).

3.186. Después de cerrar el interruptor K_2 , las fuerzas electromotrices en las bobinas deben ser iguales:

$$I_1 \Delta I_1 / \Delta t = L_2 \Delta I_2 / \Delta t, \quad \text{o} \quad \Delta I_1 = (L_2 / L_1) \Delta I_2.$$

Los valores iniciales de las corrientes en el instante en que se cierra el interruptor K_2 son $I_1 = I_0$ e $I_2 = 0$. Por consiguiente, después de cerrar el interruptor se cumple la relación $I_1 - I_0 = (L_2 / L_1) I_2$. En régimen estacionario, además, $I + I_2 = \mathcal{E} / r$. Resolviendo conjuntamente las dos últimas ecuaciones se obtienen las corrientes estacionarias:

$$I_1 = (L_2 \mathcal{E} / r + L_1 I_0) / (L_1 + L_2) \quad \text{e} \quad I_2 = (L_1 \mathcal{E} / r - L_1 I_0) / (L_1 + L_2).$$

3.187. $I_0 = \mathcal{E} / 3r$.

3.188. Por analogía con la solución del problema 3.186, se puede obtener que $L_1 I_1 = L_2 I_2$. En cada instante se cumple una relación semejante entre las cargas que pasan a través de las bobinas: $L_1 q_1 = L_2 q_2$. En el instante en que termina la recarga, la carga total que ha pasado por el circuito es igual a $2CV$, es decir, $q_1 + q_2 = 2CV$. Por lo tanto, las cargas buscadas son:

$$q_1 = 2CV L_2 / (L_1 + L_2) \quad \text{y} \quad q_2 = 2CV L_1 / (L_1 + L_2).$$

3.189. En el instante en que las corrientes a través de las bobinas alcanzan el máximo, toda la energía antes almacenada en el condensador se transforma en energía del campo magnético de las corrientes: $L_1 I_1^2 / 2 + L_2 I_2^2 / 2 = q^2 / 2C$. Utilizando la relación entre las corrientes (véase la solución del problema 3.186) $L_1 I_1 = L_2 I_2$, se obtiene que $q = I_1 \sqrt{C L_1 (L_1 + L_2) / L_2}$.

3.190. Por la ley de conservación de la energía se halla la corriente que pasa por la bobina 1 en el instante en que se cierra el interruptor K_2 (en este instante la corriente es máxima): $I_1^0 = V_0 \sqrt{C / L}$. Las corrientes a través de las bobinas 1 y 2 están ligadas por la relación $I_1 - I_2 = I_1^0$. Cuando la corriente a través de la bobina 1 toma el valor cero, la corriente a través de la bobina 2 es $I_2^0 = -I_1^0$; en virtud de la ley de conservación de la energía, éste es su valor máximo (en módulo). Al mismo tiempo, la energía del condensador es nula. Por lo tanto, dicha energía deberá ser máxima en la mitad del intervalo de tiempo entre estos instantes. Para dicho instante se escribe la ley de conservación de la energía: $L I^2 + C V_{\text{máx}}^2 / 2 = C V_0^2 / 2$, y de la relación entre las corrientes en las bobinas se obtiene que $I = I_1^0 / 2$. En definitiva se obtiene que $V_{\text{máx}} = V_0 / \sqrt{2}$.

A esta misma conclusión puede llegarse si se escribe en forma explícita la expresión de las corrientes a través de las bobinas, hallando la diferencial respecto del tiempo de la expresión de la energía del condensador e igualando a cero la derivada.

3.191. $I_{\text{máx}} = V_0 \sqrt{C / L_1}$ e $I_{\text{mín}} = (L_1 - L_2) V_0 \sqrt{C / L_1} / (L_1 + L_2)$.

3.192. En régimen estacionario la corriente a través de la bobina es $I = \mathcal{E} / r$ y la tensión en el condensador es nula. La tensión en el condensador durante las oscilaciones alcanza el valor de amplitud cuando toda la energía de la bobina $LI^2 / 2$ se transforma en energía del condensador $C(n\mathcal{E})^2 / 2$. Aplicando la fórmula del período de las oscilaciones $T = 2\pi \sqrt{LC}$, se obtiene que $C = T^2 / 2\pi n$ y $L = nrT^2 / 2\pi$.

3.193. En régimen estacionario la corriente a través de la bobina es $I = \mathcal{E} / R$ y la tensión en el condensador, igual a $\mathcal{E}$. Después de abrir el interruptor se desprende en forma de calor la energía almacenada en el circuito oscilante: $Q = E = LI^2 / 2 + C\mathcal{E}^2 / 2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 (CR^2 + L) / 2R^2$.

3.194. Como el proceso de recarga se desarrolla lentamente, las pérdidas de energía en radiación electromagnética pueden omitirse. Tampoco hay pérdidas en calor. Por consiguiente, la energía almacenada en el condensador C_1 debe conservarse: $C_1 V \mathcal{E} / 2 = C_1 V^2 / 2 + C_2 V^2 / 2$. Además, se conserva la carga: $C_1 V_0 = C_1 V_1 + C_2 V_2$. Resolviendo este sistema de ecuaciones se halla que el con-

condensador C_2 se carga hasta la diferencia de potencial $V_2 = 2C_1V_0/(C_1 + C_2) = 200$ V. El resultado no depende de la inductancia L . Esta se necesita en el circuito para asegurar que la recarga sea lenta, con lo que pueden despreciarse las pérdidas en radiación electromagnética.

3.195. Como en el circuito no existen pérdidas (véase la solución del problema 3.194) el trabajo de la batería se emplea totalmente en aumentar la energía del condensador. Designemos por q la carga que pasa por la batería. Entonces, basándose en la ley de conservación de la energía se tiene que

$$\mathcal{E}q = (q + q_0)^2/2C - q_0^2/2C \quad \text{o} \quad 2C\mathcal{E}q = q^2 + 2q_0q.$$

En estas relaciones el producto $\mathcal{E}q$ es el trabajo de la batería cuando por ella pasa la carga q . De este modo, $q = 2(C\mathcal{E} - q_0)$. El condensador, en estas condiciones, se carga hasta la diferencia de potencial $V = (q + q_0)/C = 2\mathcal{E} - q_0/C$.

3.196. Cuando el interruptor está cerrado, por el diodo no pasa corriente y el condensador permanece descargado. Al mismo tiempo la f.e.m. inducida

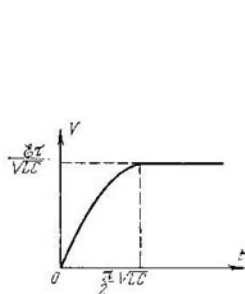


Fig. 3.136.

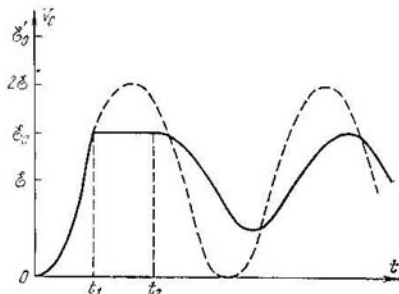


Fig. 3.137.

es igual a la f.e.m. de la batería, la corriente a través de la bobina crece linealmente con el tiempo y en el instante en que se abre el interruptor alcanza el valor $I = \mathcal{E}\tau/L$. Después de la apertura del interruptor, en el circuito empiezan las oscilaciones con el período $T = 2\pi\sqrt{LC}$, pero cuando la tensión en el condensador alcanza el valor máximo $V_0 = \mathcal{E}\tau/\sqrt{LC}$ (que puede calcularse por la ley de conservación de la energía), el diodo se cierra y luego la tensión permanece constante. Así (fig. 3.136),

$$V = \frac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad t \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC} \quad V = \frac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{LC}}, \quad t \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}.$$

3.197. Cuando se cierra el interruptor, en el circuito LC empieza el proceso oscilatorio. En este caso al equilibrio corresponde la tensión $V_C = \mathcal{E}$ en el condensador. Como en el instante inicial $V_C = 0$, la amplitud de la tensión es igual a $\mathcal{E}$ y la tensión máxima en el condensador es $2\mathcal{E}$.

Si $2\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$, el diodo está cerrado, en el circuito se producen oscilaciones armónicas (curva de trazos en la fig. 3.137) y por la batería $\mathcal{E}_0$ no pasa carga. Si $2\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$, el diodo, en cierto instante t_1 en que $V_C = \mathcal{E}_0$, se abre y por la batería $\mathcal{E}_0$ pasa corriente. Como la resistencia del diodo abierto es nula y en él no hay caída de tensión, durante todo el tiempo que pasa la corriente por la batería $\mathcal{E}_0$ la tensión en el condensador es $\mathcal{E}_0$ (curva continua en la fig. 3.137).

Por lo tanto, en el instante t_2 , en que el diodo se cierra, la carga en el condensador es igual a $C\mathcal{E}_0$. Si al mismo tiempo pasó por la batería $\mathcal{E}_0$ la carga q_0 , la batería $\mathcal{E}$ dio al circuito en total la carga $q = q_0 + C\mathcal{E}_0$. El trabajo de la batería $\mathcal{E}$ se emplea en comunicar energía al condensador y en trabajo contra la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}_0$.

Hasta el instante en que se cerró el diodo, la corriente a través de la bobina de inductancia iba de izquierda a derecha (fig. 3.99). Después de cerrarse el diodo empieza a descargarse el condensador y la corriente a través de la inductancia va de derecha a izquierda. En el instante t_2 la corriente que pasa por la inductancia L cambia de signo, es decir, es nula. Por eso es igual a cero la energía almacenada en la bobina. Así, pues, la ley de conservación de la energía

tiene para el instante t_2 la forma: $q\mathcal{E} = q_0\mathcal{E}_0 + C\mathcal{E}_0^2/2$. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones obtenidas resulta que $q_0 = C\mathcal{E}_0(2\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)/2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})$. Después de cerrarse el diodo se cumplirán en el circuito oscilaciones cuya amplitud será $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$.

3.198. Cuando la dependencia de la corriente respecto del tiempo es sinusoidal, el flujo magnético y su velocidad de variación (si se tienen en cuenta los valores máximos o medios en módulo durante el período) están ligados por una dependencia directamente proporcional. Por eso la f.e.m. inducida es, en este

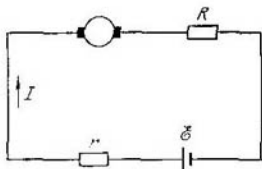


Fig. 3.138.

caso, proporcional al flujo magnético y, por consiguiente, proporcional a la corriente que excita la bobina o a la tensión en ella.

La bobina 1 crea el flujo magnético $\Phi = kV_1$, en el que $V_1 = 40$ V y k es cierto factor de proporcionalidad. La mitad de este flujo pasa por la bobina 2 y excita en ella la tensión V . Si ahora se suministra a la bobina 2 una tensión V , ésta crea un flujo $\Phi/2 = kV_1/2$. De este flujo, en virtud de la simetría del núcleo, la mitad, es decir, $kV_1/4$, pasa por la bobina 1. Por consiguiente, en la primera bobina se excita la tensión $V_2 = V_1/4 = 10$ V.

3.199. Si todo el flujo creado por una de las bobinas pasa a través de la otra, se cumple la relación $V_1/V_2 = n_1/n_2$, en la que n_1 y n_2 son los números de espiras de las bobinas 1 y 2. Como en nuestro núcleo sólo cierta parte del flujo pasa por la segunda bobina, esta proporción se modifica un poco, a saber, la tensión que se excita en la bobina no conectada a la red será tantas veces menor como la parte del flujo que la atraviesa es menor que todo el flujo que crea la otra bobina.

En el primer caso (a la red está conectada la bobina 1) $V_2/V = k_1 n_2/n_1$. En el segundo (a la red está conectada la bobina 2), $V_1/V = k_2 n_1/n_2$. Pero, por la condición del problema, el núcleo es simétrico; por lo tanto, $k_1 = k_2$. Teniendo en cuenta esta condición, se halla que $V_2/V_1 = n_2^2/n_1^2$ y, finalmente, $n_1/n_2 = \sqrt{V_1/V_2} = 3$.

3.200. En el circuito eléctrico que se considera (fig. 3.138) actúa la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}$ y la f.e.m. inducida $\mathcal{E}_{\text{ind}}$, que surge al girar el inducido y está dirigida al encuentro de la f.e.m. de la batería $\mathcal{E}$. Por consiguiente, para este circuito la ley de Ohm toma la forma $\mathcal{E} = IR + \mathcal{E}_{\text{ind}}$, donde R es la resistencia del circuito, compuesta por la resistencia de los conductores de conexión, los devanados del inducido del motor, la batería, etc. Cuando el inducido está en reposo, $\mathcal{E}_{\text{ind}} = 0$ y $\mathcal{E} = I_0 R$; de aquí $\mathcal{E} = \mathcal{E} I/I_0 + \mathcal{E}_{\text{ind}}$. Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la corriente I , se obtiene que $\mathcal{E} I = \mathcal{E}^2 I/I_0 + I \mathcal{E}_{\text{ind}}$. El primer miembro de esta igualdad es la potencia global que gasta la batería. El primer término del segundo miembro es la potencia de las pérdidas en calor, y $N = I \mathcal{E}_{\text{ind}}$, la potencia útil del motor. Por lo tanto, $N = \mathcal{E} I - \mathcal{E}^2 I/I_0 = 8$ W.

3.201. La ley de Ohm para el circuito formado por la fuente de f.e.m. y el motor eléctrico de corriente continua tiene la forma (véase la solución del pro-

blema 3.200) $\mathcal{E} = IR + \mathcal{E}_{\text{ind}}$, donde R es la resistencia del circuito y $\mathcal{E}_{\text{ind}}$, la f.e.m. inducida del inducido del motor. Cuando el inducido está en reposo, $\mathcal{E}_{\text{ind}} = 0$ y $\mathcal{E} = I_0 R$. La potencia que gasta la fuente que alimenta al motor en régimen estacionario es $N_1 = \mathcal{E}I$, y la potencia útil, $N_2 = \mathcal{E}_{\text{ind}}I$; por consiguiente, $\eta = \mathcal{E}_{\text{ind}}/\mathcal{E} = 1 - I/I_0 = 0,4$, es decir, al 40%.

3.202. Como las pérdidas térmicas se pueden despreciar (véase la solución del problema 3.200), la potencia útil de la locomotora eléctrica será $N = Fv = \mathcal{E}_{\text{ind}}I = VI$, de donde $I = Fv/V = 980$ A.

3.203. La ley de conservación de la energía para el generador se escribe en la forma $N = \mathcal{E}I/R + \alpha N$, en la que $\mathcal{E}$ es la f.e.m. inducida que desarrolla la máquina. De esta ecuación se halla $\mathcal{E} = [NR/(1 - \alpha)]^{1/2} = 120$ V. Por la condición del problema, cuando varía la carga se mantiene el número de revoluciones de antes. Como la f.e.m. sólo depende de la velocidad con que varía el flujo magnético que atraviesa el devanado del inducido, si el número de revoluciones es constante, la f.e.m. inducida será también constante. Basándose en la ley de conservación de la energía se tiene que $N_1 = \mathcal{E}^2/R_1 + \alpha N_1 = NR/R_1 = 250$ W.

3.204. $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0 - IR)$ $n_2/n_1 = 46,7$ V.

3.205. La resistencia del soldador es $R = V^2/N$. Al conectarlo a la red de corriente alterna de tensión $V_1 = 220$ V sin diodo, se liberaría en él la potencia $N_1 = V_1^2/R = V_1^2 N/V^2 = 150$ W. Si se conectara el soldador, con el diodo, a la red, pasaría por él durante un semiperíodo la misma corriente que sin diodo; pero durante el otro semiperíodo la corriente sería nula. Por eso, la potencia media liberada en el soldador, acoplado al diodo, sería $N_2 = N_1/2 = 75$ W.

$$3.206. N = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3 (R_1 + R_2)} \right) = 423,5 \text{ W.}$$

3.207. Como puede verse en el esquema, los diodos están conectados de tal forma que simultáneamente dejan pasar la corriente o la interrumpen. Durante un semiperíodo, en el que dejan pasar la corriente, las resistencias R_1, R_2 y R_3 resultan acopladas en paralelo. En la resistencia R_1 se libera en este caso la energía $N_1 = V^2/R_1$. Durante el otro semiperíodo los diodos no dejan pasar la corriente y las resistencias R_1, R_2 y R_3 resultan acopladas en serie. En este caso en la resistencia R_1 se libera la potencia $N_2 = V^2 R_1 / (R_1 + R_2 + R_3)^2$. La potencia media que se libera en esta resistencia es

$$N = \frac{1}{2} (N_1 + N_2) = \frac{V^2}{2R_1} \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right)^2 \right] = 1 \text{ W.}$$

3.208. Cuando el interruptor está abierto, teniendo en cuenta que el diodo sólo deja pasar la corriente durante medio período, la potencia es $N_1 = V^2/2R$. Si el interruptor está cerrado, en la resistencia R se establece prácticamente una tensión constante igual al valor de amplitud de la tensión en la red, $V/\sqrt{2}$. La potencia será $N_2 = 2V^2/R$, es decir, aumenta cuatro veces. Como, cuando la tensión en el condensador es V , la corriente que pasa por R es igual a V/R , durante un período puede pasar la carga $\Delta q \approx V/R$. Para que la tensión en el condensador varíe poco durante el período es necesario que se cumpla la condición $\Delta q \ll q = CV$. De aquí resulta que $RC \gg 1$.

IV. ÓPTICA

Reflexión y refracción de la luz

4.1. Se determina la altura h del espejo. Como en el espejo plano la imagen es simétrica al objeto, la distancia desde el ojo O hasta la imagen (fig. 4.56) es $L = l + 2l_0 = 3$ m. Cuando la altura del espejo, en el cual se ve toda ventanilla, es mínima, el rayo que va desde el borde de ésta se refleja en el borde

del espejo y llega al ojo. De la semejanza de los triángulos OAB y OA_1B_1 se obtiene que $h = Hl_0/L = 7.5$ cm, donde $H = 45$ cm es la altura de la ventanilla. Análogamente se determina la anchura b del espejo: $b = Bl_0/L = 20$ cm.

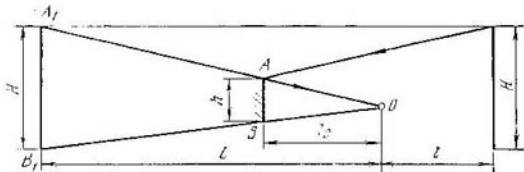


Fig. 4.56.

4.2. Los rayos de la rayita inferior A , después de refractarse en el límite superior de la lámina de vidrio, parecerá que parten de cierto punto A_1 , que puede considerarse como la imagen de la rayita inferior en la lámina plano-paralela (fig. 4.57). Al pasar el enfoque del microscopio de la rayita superior a la inferior, su tubo debe desplazarse la distancia $l = BA_1$. De los triángulos ABC y A_1BC se obtiene que $\text{tg } i/\text{tg } r = dl/l$. Por la condición del problema, en el objetivo del microscopio sólo entran los rayos que forman con el eje de éste ángulos suficientemente pequeños. Para estos rayos se puede aceptar aproximadamente que $\text{tg } i/\text{tg } r \approx \text{sen } i/\text{sen } r = n$. Por lo tanto, $n \approx dl/l = 1.5$.

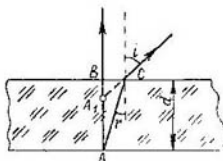


Fig. 4.57.

Observación. De esta solución se infiere que la posición del punto A_1 no depende de los ángulos i y r solamente cuando éstos son suficientemente pequeños. Por consiguiente, la imagen de la rayita inferior en el microscopio sólo será nítida si se cumple la condición de pequeñez de los ángulos de desviación de todos los rayos que llegan al objetivo.

4.3. El palo le parecerá recto al observador que mira a lo largo de su parte emergente del agua si la dirección de la parte sumergida coincide con la dirección del rayo refractado (fig. 4.58). El ángulo de quebradura $\beta = i - r$, siendo $\text{sen } i/\text{sen } r = n$. De aquí resulta que $\beta = \pi/2 - \alpha - \arcsen(\cos \alpha/n)$.

4.4. Sigamos cierto rayo $OABCD$ que, saliendo del ojo, después de reflejarse en el espejo vuelve a incidir sobre el ojo (fig. 4.59). Los ángulos α y β son pequeños, de modo que $\text{sen } \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$ y $\text{sen } \beta \approx \text{tg } \beta \approx \beta$. El ojo ve la imagen del punto O en O' , que se encuentra en la prolongación del rayo CD . En la fig. 4.59 se ve que $OD \approx ad \approx 2h\alpha + 2l\beta \approx 2\alpha(h + l/n)$. Al escribir la última igualdad se tuvo en cuenta la ley de la refracción: $\text{sen } \alpha/\text{sen } \beta \approx \alpha/\beta = n$. Por lo tanto, la profundidad del recipiente es $l \approx (d - 2h)n/2 = 10$ cm.

4.5. Por la ley de la refracción $\text{sen } \alpha/\text{sen } \beta = n = c/v$. Por la condición del problema, $\alpha + \beta = \pi/2$; por consiguiente, $\text{sen } \beta = \cos \alpha$ y $\text{tg } \alpha = c/v = 1.5$; $\alpha = \arctg 1.5 \approx 56^\circ$.

4.6. La aparición de la franja oscura sobre la pantalla se deduce de la construcción que se da en la fig. 4.60. El haz de rayos paralelos que incide sobre el prisma se divide en dos, cada uno de los cuales se desvía cierto ángulo φ respecto de la dirección del rayo incidente (cada haz se representa en la fig. 4.60 con su rayado). Primero se halla la relación entre el ángulo de refracción α del prisma y el ángulo de desviación φ de los rayos. Para esto basta considerar la refracción de los rayos en la segunda superficie del prisma. El ángulo de inci-

dencia de los rayos sobre esta superficie es α , el de refracción es igual a $\alpha + \varphi$; por consiguiente, $\text{sen } \alpha / \text{sen } (\alpha + \varphi) = 1/n$. Como puede verse en la fig. 4.60, $\text{tg } \varphi \approx (\alpha + \beta)/L = 3 \cdot 10^{-2}$. El ángulo φ resulta ser pequeño. Por la condición

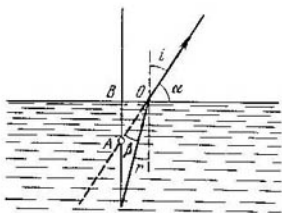


Fig. 4.58.

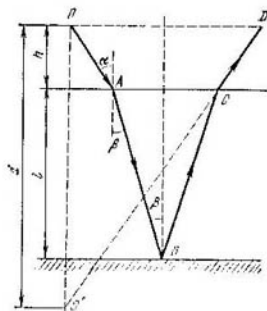


Fig. 4.59.

del problema, el ángulo α también es pequeño. Esto da la posibilidad de sustituir sus senos y tangentes por los ángulos mismos: $\alpha/(\alpha + \varphi) = 1/n$ y $\alpha = \varphi/(n - 1) = 3^\circ$.

4.7. Si i es el ángulo de incidencia del rayo sobre la cara lateral del prisma y r , el ángulo de refracción (fig. 4.61), la desviación del rayo al refractarse en una

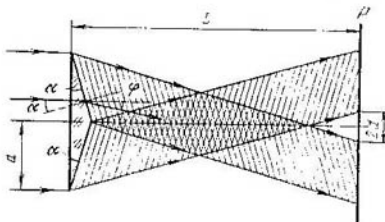


Fig. 4.60.

cara es $\beta/2 = i - r$. Como dentro del prisma el rayo se propaga paralelamente a la base, $r = \alpha/2$ (por ser ángulos de lados mutuamente perpendiculares), es decir, $r = 15^\circ$. Por la ley de refracción $\text{sen } i = n \text{ sen } r$. Sustituyendo r por su valor se halla que $i = 31^\circ$. De aquí que sea $\beta = 2(i - r) \approx 32^\circ$.

4.8. De la solución del problema 4.7 se sigue que $r = \alpha/2$ o $i = \beta/2 + r = (\alpha + \beta)/2$. Por la ley de la refracción $n = \text{sen } [(\alpha + \beta)/2] / \text{sen } (\alpha/2)$.

4.9. El ángulo de incidencia del rayo sobre la segunda cara del prisma cuando llega a ella la primera vez es igual a α , la segunda, a 3α , la m -ésima, a $\alpha_m = (2m - 1)\alpha$ (fig. 4.62). Los rayos emergerán del prisma si el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de reflexión total, el cual se halla por la condición $\text{sen } \alpha_0 = 1/n$, de donde, $\alpha_0 = 45^\circ$, $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$ y $\alpha_3 = 50^\circ$. Por lo

tanto, $\alpha_3 > \alpha_2$, es decir, el tercer rayo sufre la reflexión total. Así, pues, del prisma sólo salen dos rayos.

4.10. Por la ley de la refracción, en el límite entre los dos prismas (fig. 4.63) tenemos que $\text{sen } \alpha / \text{sen } \beta = n_2 / n_1$. El ángulo de incidencia sobre la segunda cara del prisma con índice de refracción n_2 es $\gamma = \beta - \alpha$. Por la ley de la refracción,

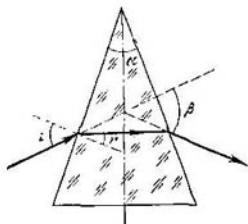


Fig. 4.61.

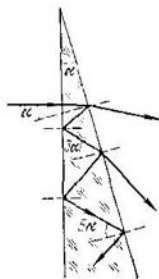


Fig. 4.62.

en $\varphi / \text{sen } \gamma = n_2$. La diferencia entre los índices de refracción de los prismas es

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } (\beta - \alpha)} \left(\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} - 1 \right).$$

Teniendo en cuenta la pequeñez de los ángulos se obtiene que $\Delta n \approx \varphi / \alpha$.

4.11. En la fig. 4.64 se ve que el ángulo de incidencia del rayo sobre la cara lateral es $i = \alpha$, y el ángulo de incidencia sobre la base, $\beta = 90^\circ - (\alpha - r)$.

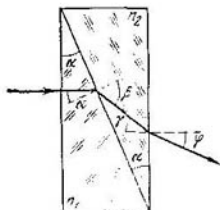


Fig. 4.63.

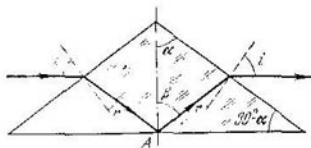


Fig. 4.64.

Por la ley de la refracción, $\text{sen } \alpha / \text{sen } r = n$. Hay que demostrar que $\text{sen } \beta \geq 1/n$:

$$\begin{aligned} \text{sen } \beta &= \cos (\alpha - r) = \cos \left(1 - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{n^2} \right)^{1/2} + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{n} = \\ &= \frac{1}{n} [\cos \alpha (n^2 - \text{sen}^2 \alpha)^{1/2} + \text{sen}^2 \alpha]. \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis rectangulares es igual a 1 cuando $n = 1$, y mayor que 1 cuando $n > 1$. Por consiguiente, hemos demostrado que $\text{sen } \beta \geq 1/n$, es decir, que en el punto A se produce la reflexión total.

4.12. En las caras AB y BC se produce la reflexión total, por lo tanto (fig. 4.65), se tiene que $\text{sen } \gamma \geq 1/n$ y $\text{sen } \delta \geq 1/n$, además, $\gamma + \delta = 90^\circ$. Como $n = 2$, serán

$$\text{sen } \gamma \geq 1/2, \quad \gamma \geq 30^\circ; \quad \text{sen } \delta = \cos \gamma \geq 1/2, \quad \gamma \leq 60^\circ.$$

Del triángulo abc ($ab \perp BC$) se deduce que $45^\circ + \gamma + 90^\circ - \beta = 180^\circ$, de donde $\beta = \gamma - 45^\circ$, es decir, $\beta \leq 15^\circ$. Así, pues, $\beta_{\text{máx}} = 15^\circ$ y, por la ley de la refracción

$$\text{sen } \alpha_{\text{máx}} = n \text{ sen } \beta_{\text{máx}} = 0,516 \quad \text{y} \quad \alpha_{\text{máx}} = 31^\circ.$$

4.13. La longitud de la base debe ser tal, que el rayo superior del haz, procedente del punto B , incida sobre el punto de la base más lejano, C (fig. 4.66).

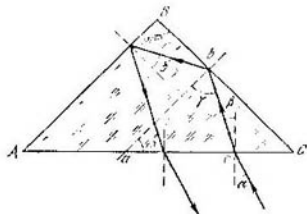


Fig. 4.65.

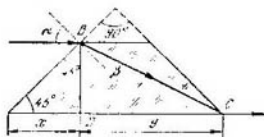


Fig. 4.66.

En este caso $\alpha = 45^\circ$ y $\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha/n = 1/2$, de donde $\beta = 30^\circ$. Del triángulo BDC se tiene que $y = h \text{ tg } 75^\circ = 7.9 \text{ cm}$ y $x = h \text{ tg } 45^\circ = 2.1 \text{ cm}$. Por lo tanto, la longitud mínima de la base AC debe ser $l = x + y = 10 \text{ cm}$.

4.14. A causa de la reflexión total no se verá el trozo AD si $\text{sen } \alpha = 1/n$ (fig. 4.67); en este caso $\beta = 45^\circ - \alpha$. Del triángulo ABC , por el teorema de los senos se tiene que $a/\text{sen } \beta = l/\text{sen } (90^\circ + \alpha)$, de donde

$$\frac{a}{l} = \frac{\text{sen } (45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right),$$

$$l = \frac{L}{\sqrt{2}}, \quad 1 - k = \frac{a}{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2 - 1} \right).$$

En definitiva se obtiene que $n = [(2k - 1)^2 + 1]^{1/2} / (1 - 2k) = 1.5$.

4.15. Los haces de longitudes de onda diferentes dejarán de superponerse (fig. 4.68) al salir de la lámina, si $d \text{ tg } \beta_1 + a/\cos \alpha = d \text{ tg } \beta_2$. Por la ley de la refracción $\text{sen } \beta_1 = \text{sen } \alpha/n_1$ y $\text{sen } \beta_2 = \text{sen } \alpha/n_2$; por consiguiente,

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{\text{sen } \alpha}{n_1} \left[1 - \left(\frac{\text{sen } \alpha}{n_1} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \text{tg } \beta_2 = \frac{\text{sen } \alpha}{n_2} \left[1 - \left(\frac{\text{sen } \alpha}{n_2} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

$$d \geq \frac{2a}{\text{sen } 2\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - \text{sen}^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \text{sen}^2 \alpha}} \right)^{-1}.$$

4.16. Consideremos primero la marcha de los rayos de longitud de onda λ_2 (fig. 4.69). En la cara delantera no se refractan los rayos. Para la reflexión en

la cara trasera puede escribirse que $n_1 \alpha = \varphi_1 + \alpha$. De aquí se determina el ángulo de desviación de los rayos respecto de su dirección inicial: $\varphi_1 = \alpha (n_1 - 1)$. Evidentemente, φ_1 es el ángulo entre la dirección de los rayos refractados

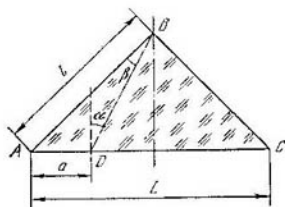


Fig. 4.67.

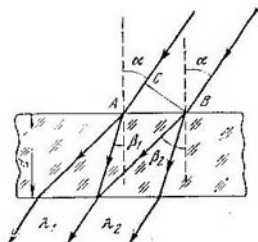


Fig. 4.68.

y el eje óptico de la lente. Sobre la pantalla convergen los rayos en un punto que se encuentra del eje óptico a la distancia $l_1 \approx \varphi_1 / \alpha = (n_1 - 1) f$. Estos

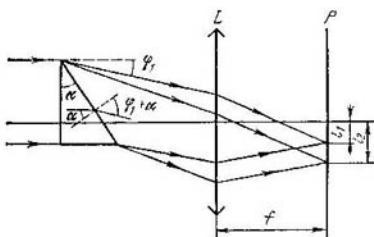


Fig. 4.69.

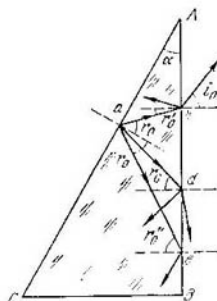


Fig. 4.70.

misimos razonamientos se repiten para los rayos de longitud de onda λ_2 : $l_2 \approx \varphi_2 / \alpha = \alpha (n_2 - 1) f$. Restando las ecuaciones obtenidas resulta que $n_1 - n_2 = l / \alpha f$.

4.17. Como la componente λ_1 sufre la reflexión total y la λ_2 no la sufre, se pueda escribir que

$$\frac{1}{n_1} < \sin \alpha < \frac{1}{n_2}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{1 + a / \lambda_1^2} < \sin \alpha < \frac{1}{1 + a / \lambda_2^2},$$

de donde $0.5 < \sin \alpha < 0.526$ y $30^\circ < \alpha < 31^\circ 45'$.

4.18. Consideremos la refracción de la luz en cierto punto a situado en la cara AC (fig. 4.70). Esta cara, por la condición del problema, se ilumina con

rayos de todas las direcciones posibles (luz difusa). Como el prisma de vidrio es un medio ópticamente más denso que el aire, el ángulo de refracción no puede ser mayor que cierto ángulo límite r_0 determinado por la relación $\text{sen } r_0 = 1/n$. Los rayos extremos del cono luminoso que parte del punto a incidirán sobre la cara AB bajo los ángulos $r'_0 = r_0 - \alpha$ y $r''_0 = r_0 + \alpha$ en los puntos b y c . Advertimos que $r'_0 < r_0$ y $r''_0 > r_0$; esto significa que el rayo ab no experimenta la reflexión total en el límite vidrio—aire, mientras que el rayo ac sí se refleja totalmente. El ángulo de refracción i_0 del rayo que emerge del prisma en el punto b se halla por la relación $\text{sen } r'_0 / \text{sen } i_0 = 1/n$ o

$$\frac{\text{sen}(i_0 - \alpha)}{\text{sen } i_0} = - \frac{\text{sen } \alpha \cos r_0 - \cos \alpha \text{sen } r_0}{\text{sen } i_0} =$$

$$= - \frac{\text{sen } \alpha \sqrt{1 - 1/n^2} - \cos \alpha / n}{\text{sen } i_0} = \frac{1}{n}.$$

De aquí se obtiene que

$$n = \sqrt{\text{sen } i_0 \text{sen } \alpha - \text{ctg } \alpha^2 + 1}.$$

Todos los rayos que salen del prisma bajo el ángulo i_0 convergen en un punto determinado del plano focal de la lente (punto D en la fig. 4.9), la dirección al cual, desde el centro de la lente, forma con el eje óptico un ángulo i_0 . La luz no puede llegar más arriba del punto D (región no iluminada) porque los rayos

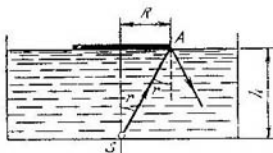


Fig. 4.71.

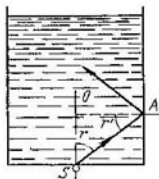


Fig. 4.72.

que emergen del prisma no pueden ser desviados hacia arriba, respecto del eje óptico, un ángulo mayor que i_0 . Más abajo del punto D se encuentra la región iluminada; el ángulo de desviación de los rayos hacia abajo, respecto del eje óptico, puede ser cualquiera en el intervalo desde 0 hasta 90° (por ejemplo, en el punto d de la fig. 4.70, el rayo que emerge del prisma está desviado 90° hacia abajo, respecto del eje óptico). En nuestro caso $\alpha = 30^\circ$ e $i_0 = 30^\circ$ y, por consiguiente, $n = \{(1 - \sqrt{3})^2 + 1\}^{1/2} \approx 1,24$.

4.19. A través de la superficie del agua no saldrá ni un solo rayo si el SA (fig. 4.71) experimenta la reflexión total en el límite agua—aire. Escribamos la condición de reflexión total para el rayo SA :

$$\text{sen } r = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \geq \frac{1}{n}, \text{ de donde } R \geq \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

4.20. La lámpara no podrá verse a través de las paredes laterales del recipiente si todos los rayos que inciden sobre dichas paredes experimentan la reflexión total. La condición de reflexión total en la pared lateral tiene la forma $\text{sen } r' \geq 1/n$, siendo n el índice de refracción del líquido, y r' , el ángulo de incidencia del rayo sobre la pared lateral (fig. 4.72). Consideremos ahora los rayos de la fuente S que penetran en el líquido a través del fondo del recipiente.

Como el líquido, respecto del aire, es un medio ópticamente más denso, el ángulo de refracción r de los rayos no puede ser mayor que cierto ángulo límite r_0 , correspondiente a la incidencia rasante del rayo de la fuente sobre el fondo del recipiente. El ángulo límite r_0 se determina por la condición $\sin r_0 = 1/n$. Del triángulo SOA se sigue que $r' = 90^\circ - r$.

Al ángulo límite r_0 corresponde el ángulo de incidencia mínimo de los rayos sobre la pared lateral $r'_0 = 90^\circ - r_0$. Si la condición de reflexión total en la

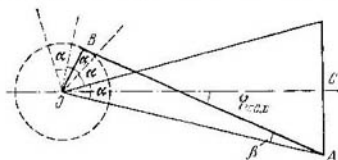


Fig. 4.73.

pared lateral se cumple para $r' = r'_0 = 90^\circ - r_0$ (rayo límite), también se cumplirá, naturalmente, para todos los demás rayos. Por lo tanto, la solución del problema se escribe en la forma

$$\sin r'_0 = \cos r_0 = \sqrt{1 - \sin^2 r_0} = \sqrt{1 - 1/n^2} \geq 1/n,$$

de donde se deduce que $n \geq \sqrt{2} \approx 1.41$, $n_{\min} \approx 1.41$.

Observación. Al resolver este problema las paredes de vidrio del recipiente, entre el líquido y el aire, no se han tomado en consideración porque las condiciones de refracción de la luz en el límite entre dos medios no dependen de la existencia de una capa intermedia, siempre que no se produzca la reflexión total en la superficie interna de dicha capa.

4.21. Teniendo en cuenta que dentro del guía de luz sólo se pueden propagar aquellos rayos que experimentan la reflexión total en las paredes, se obtiene que $D = 2L \sqrt{(n^2 - 1)/(2 - n^2)} \approx 8.9$ cm.

$$4.22. \varphi_{\max} = \arcsen \sqrt{n^2 - 1} \approx 90^\circ.$$

4.23. El rayo que incide bajo el ángulo máximo debe tocar el fotocátodo. Para simplificar la solución vamos a considerar no la múltiple reflexión entre los espejos, sino el paso del rayo a través del sistema de espejos (fig. 4.73). Por el triángulo AOC se halla el radio de la superficie cilíndrica del fotocátodo:

$$L + r = \frac{d}{2 \sin(\alpha/2)}, \quad r = \frac{d}{2 \sin(\alpha/2)} - L.$$

Y por el triángulo ABO se tiene que

$$\sin \beta = \frac{r}{L + r} = 1 - \frac{2L}{d} \sin(\alpha/2) \approx 0.5, \quad \text{de donde } \beta = 30^\circ.$$

Así, $\varphi_{\max} = \beta + \alpha/2 = 36^\circ$.

4.24. Un rayo rasante a la superficie exterior penetrará en el vidrio bajo un ángulo α tal (fig. 4.74), que $\sin \alpha = 1/n_v$. Este rayo incidirá sobre la superficie interior si $\beta \leq 90^\circ$, es decir, $\sin \alpha \leq r/R$ o bien $r/R \geq 1/n_v$. Penetrará en el líquido si $\sin \beta \leq n/n_v$. Por el triángulo AOB se halla que $\sin \alpha / \sin \beta = r/R$. Aplicando las expresiones del $\sin \alpha$ y del $\sin \beta$ se obtiene que $r/R \geq 1/n$. Como $n < n_v$, esta condición tiene más fuerza que $r/R \geq 1/n_v$ y es la solución del problema.

$$4.25. \varphi_{\max} = \arcsen(r/R) = 30^\circ.$$

4.26. Considerando el pez como una fuente de luz que se encuentra en el punto A , se obtiene su imagen (punto B en la fig. 4.75). La distancia buscada es $x = AB$. Tomando en consideración que al ojo llega un estrecho haz de rayos

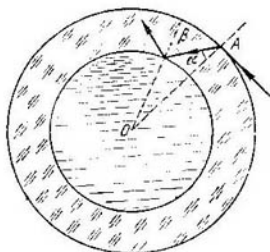


Fig. 4.74.

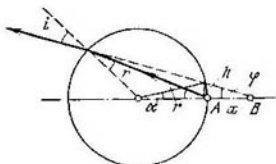


Fig. 4.75.

y, por lo tanto, los ángulos i , r y φ son pequeños, se escribe que $h = xp = \approx x(2r - i)$. Por otra parte, $h = Ra \approx 2R(i - r)$, de donde $r = 2R(i - r)/(2r - i) = 2R(n - 1)/(2 - n)$. Haciendo la sustitución $n = 4/3$ se obtiene que $x = R$.

4.27. Supongamos que la línea quebrada BOD representa la marcha del rayo buscada (fig. 4.76) y que r y R son, respectivamente, los radios de las

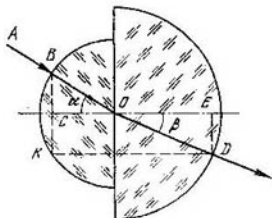


Fig. 4.76.

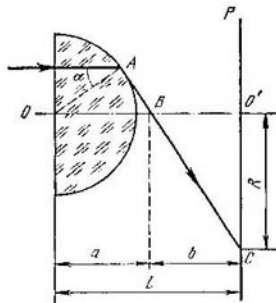


Fig. 4.77

esferas pequeña y grande. Examinando los triángulos BOC y OED , hallamos que $BC = r \sin \alpha$ y $DE = R \sin \beta$. Teniendo en cuenta que $\sin \alpha : \sin \beta = n_2/n_1 = R/r$, resulta $BC = DE$. La marcha del rayo AB , por consiguiente, puede construirse así: desde el punto B se baja una perpendicular a la recta CE y se prolonga hasta su intersección con la esfera (punto K). Por este punto se traza una recta $KD \parallel CE$ hasta su intersección con la segunda esfera (punto D). Uniendo los puntos D y O se obtiene la dirección del rayo emergente.

4.28. A causa de la reflexión total, de la esfera sólo emergen los rayos que inciden sobre la superficie bajo un ángulo menor o igual que $\alpha = \arcsen(1/n) = 45^\circ$. Construyamos el rayo límite, que incide bajo el ángulo α (fig. 4.77). Por el triángulo OAB hallamos $a = r/\cos \alpha$. Entonces $b = L - a = L - r/\cos \alpha$. Y como $\alpha = 45^\circ$, tenemos que $R = b = L - r/\cos \alpha = 2$ cm.

4.29. Teniendo en cuenta que el rayo, al refractarse, se desvía dos veces un ángulo α , de manera que $\varphi = 2\alpha$, y que la desviación máxima la sufrirá el rayo rasante, hallamos que $n = \sin 90^\circ / \sin 45^\circ = 1,41$.

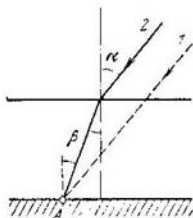


Fig. 4.78.

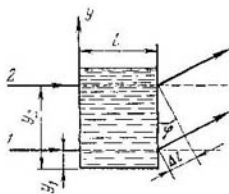


Fig. 4.79.

4.30. En ausencia de la atmósfera, el rayo de la estrella llegaría al observador bajo el ángulo α (rayo 1 en la fig. 4.78). Pero debido a la refracción en la atmósfera (considerando ésta como una lámina de caras planas y paralelas con índice de refracción n) el rayo 2 llega al observador A bajo el ángulo β . Por la ley de la refracción $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Como n difiere poco de 1, será $\alpha = \beta + \Delta\beta$ ($\Delta\beta \ll \beta$) y $\sin \alpha = \sin(\beta + \Delta\beta) \approx \sin \beta + \Delta\beta \cdot \cos \beta$. Aplicando ahora la ley de la refracción, hallamos que $\Delta\beta \approx (n - 1) \operatorname{tg} \beta = 3 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 1 \text{ min. angular}$.

Observación. El resultado obtenido también es correcto si se tiene en cuenta la variación del índice de refracción según la altura de la atmósfera. Damos al lector la posibilidad de analizar este caso general.

4.31. $n = 1,0006$ (véase la solución del problema 4.30).

4.32. Consideremos dos rayos que pasan a través del recipiente a distinta altura, y_1 e y_2 (fig. 4.79). La longitud del camino óptico recorrido por el rayo 1 es $l_1 = L(n_0 + \alpha y_1)$. Omítimos la desviación del rayo dentro del recipiente, ya que, por la condición del problema, es pequeña. Para el rayo 2 tenemos que $l_2 = L(n_0 + \alpha y_2)$. El ángulo en que gira el frente de la onda al salir del recipiente es $\varphi \approx (l_2 - l_1)/(y_2 - y_1) = \alpha L$. En el plano focal de la lente, los rayos que inciden bajo el ángulo φ respecto del eje óptico, convergen en un foco secundario, desplazado con relación al principal la distancia $\Delta y = f \operatorname{tg} \varphi \approx f\varphi = \alpha Lf$.

Lentes delgadas

4.33. La recta SS_1 corta el eje óptico OO_1 en el centro óptico de la lente, ya que por este punto pasa el rayo sin refractarse (fig. 4.80). Así, se ha hallado la posición de la lente y, además, ya se ve que la imagen es virtual, derecha y menor que el objeto; por consiguiente, la lente es divergente. Para hallar la posición de su foco se traza la recta $SA \parallel OO_1$. Después de refractarse en la lente, su prolongación debe pasar por el punto S_1 . El punto de intersección de AS_1 con OO_1 es el foco principal F de la lente.

4.34. Trazamos el rayo auxiliar aa' que pasa por el centro óptico de la lente y es paralelo al rayo AB (fig. 4.81). La prolongación del rayo BC corta

el rayo aa' en el plano focal ff' de la lente. El punto F es el foco principal de la lente.

4.35. Primero, construyendo el rayo auxiliar aa' paralelo al AB , se determina la posición del plano focal ff' (fig. 4.82). Después, por medio de otro rayo

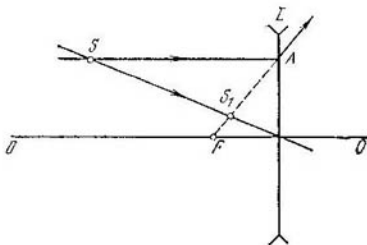


Fig. 4.80.

auxiliar bb' paralelo al DE , se determina la dirección del rayo refractado EF . El caso en que el punto de intersección de los rayos AB y DE se encuentra a la derecha de la lente, proponemos al lector que lo analice él mismo.

4.36. La distancia desde la fuente S hasta la lente es $a = \sqrt{lL}$; la distancia focal, $f = \sqrt{lL} - l > 0$.

4.37. Se construyen las imágenes de las fuentes A y B . La imagen de la fuente A se encuentra en el eje óptico principal en el punto A' , a la distancia $2f$

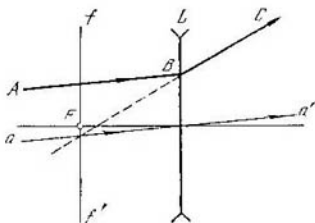


Fig. 4.81.

de la lente. La construcción de la imagen de la fuente B se ve claramente en la fig. 4.83. El ángulo que se busca se determina por la relación $\operatorname{tg} \psi = y/(b - 2f)$, en la que y y b son las distancias desde la imagen B' hasta el eje óptico principal y hasta la lente. Por otra parte, $\operatorname{tg} \varphi = x/(2f - a)$, siendo x y a las distancias desde la fuente B hasta el eje óptico principal y hasta la lente. De la semejanza de los triángulos BCO y $B'C'O$ se sigue que $x/y = a/b$. Por la fórmula de la lente $1/a + 1/b = 1/f$, de donde $b = af/(a - f)$. Utilizando estas ecuaciones se halla

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{y}{x} = \frac{2f - a}{b - 2f} = \frac{b}{a} \frac{2f - a}{b - 2f}.$$

Sustituyendo b por su expresión se obtiene que $\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \varphi$. Por consiguiente, $\varphi = 30^\circ$. Así, si la pantalla se coloca formando un ángulo de 30° con el eje óptico principal, de manera que corte dicho eje en el punto que se encuentra a la distancia $2f$ de la lente, las imágenes de ambas fuentes serán nítidas.

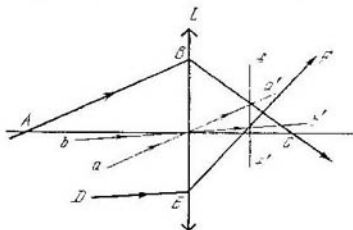


Fig. 4.82

4.38. Sea x la distancia desde el objeto hasta la imagen. Entonces la distancia desde la lente hasta la imagen será $b = x - a$. Aplicamos la fórmula de la lente $1/f + 1/a + 1/(x - a)$. Después de hacer las transformaciones se

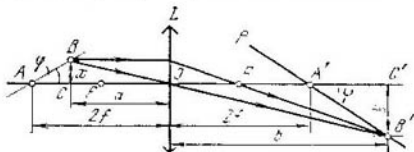


Fig. 4.83

obtiene que

$$a^2 - ax + fx = 0, \quad a = x/2 \pm \sqrt{(x/2)^2 - fx}.$$

Teniendo en cuenta que f , a y x son magnitudes reales, se obtiene que $(x/2)^2 - fx \geq 0$. La imagen es real; por consiguiente, $f > 0$ y $x > 0$. Por lo tanto, $x/4 - f \geq 0$ y $x_{\min} = 4f$. Respectivamente, $a = 2f$.

4.39. $f = (L^2 - l^2)/4L$.

4.40. $f = -l\beta/(1 - \beta)^2 = -10$ cm.

4.41. El aumento $\beta = (b - f)/f = f(a - f)$. Como $L = a + b$, se obtiene que $L = f(1 + \beta)^2/\beta$, y $L_2/L_1 = (1 + \beta_2)^2/\beta_1(1 + \beta_1)^2/\beta_2$. Resolviendo esta ecuación cuadrática se encuentran dos soluciones: $\beta_1' = 5$ y $\beta_2' = 1/5$.

4.42. $f_2 = 25$ cm.

4.43. En la fig. 4.84 se ve que son posibles dos soluciones. Si la imagen de la fuente se obtiene detrás de la pantalla (S_1), $d/D = (b - L)/b$, de donde $b = L/(1 - d/D)$. Por la fórmula de la lente $a = \frac{Lf}{b-f} = \frac{Lf}{L-f(1-d/D)} = 15,8$ cm. En el segundo caso se obtiene $a' = \frac{Lf}{L-f(1-d/D)} = 20$ cm.

4.44. $f = l(1 + \sqrt{2}) = 9,65$ cm. La lente puede ser tanto convergente como divergente.

$$4.45. \beta = [(b - f)/(a - f)]^{1/2} = 3.$$

$$4.46. f = l\beta/2 = 9 \text{ cm.}$$

$$4.47. \beta = 2f/l = 2.$$

4.48. Como $\beta = (b - f)/f$, se obtiene que $f = b/(1 + \beta)$. Poniendo en esta fórmula los datos experimentales de la gráfica, resulta que $f = 5 \text{ cm.}$

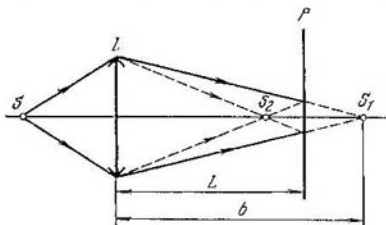


Fig. 4.84.

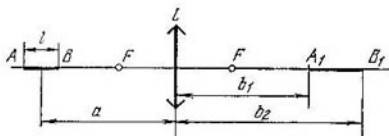


Fig. 4.85.

4.49. Sean A_1 , la imagen del punto A , y B_1 , la imagen del punto B (fig. 4.85). Aplicando para estos puntos dos veces la fórmula de la lente, se obtiene

$$\frac{1}{a + l/2} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a - l/2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}.$$

De estas relaciones resulta que

$$b_1 = \frac{(a - l/2)f}{a + l/2 - f}, \quad b_2 = \frac{(a - l/2)f}{a - l/2 - f}.$$

Después de hacer unos cálculos fáciles se tiene

$$A_1B_1 = b_2 - b_1 = \frac{f^2 l}{(a - f)^2 - (l/2)^2}.$$

El aumento longitudinal buscado se expresa por la fórmula

$$\beta = \frac{b_2 - b_1}{l} = \frac{f^2}{(a - f)^2 - (l/2)^2}.$$

4.50. En la fig. 4.86 se ve que la imagen del cubo tiene la forma de pirámide truncada de base cuadrada. La longitud de los lados de la base mayor es l , ya que en este caso $a_1 = b_1 = 2f$ y el aumento $\beta = 1$. Para la base menor, por la fórmula de la lente, tenemos que $b_2 = a_2 f / (a_2 - f) = (2f + l) f / (f + l)$. De la semejanza de los triángulos hallamos la longitud l_1 del lado de la base menor:

$l_1 = l(b_2 - f)/f = l/(f + l)$. La altura de la pirámide truncada es $h = 2f - b_2 = 2fl/(f + l)$. El volumen de dicha pirámide será

$$V = \frac{h}{3} (l^2 + l_1^2 + ll_1) = \frac{l^3}{3} \frac{1}{f+l} \left[1 + \frac{f^2}{(f+l)^2} + \frac{f}{f+l} \right].$$

4.51. En ausencia de la lámina de vidrio la distancia desde la lente hasta la imagen es $b = a/(aD - 1) = 60$ cm, donde $D = 1/f$ es el poder óptico de la

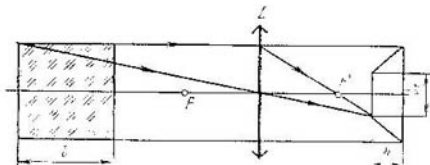


Fig. 4.86.

lente. Consideremos ahora la refracción de los rayos en la lámina. Como puede verse en la fig. 4.87, el desplazamiento vertical del rayo que pasa por la lámina es $d = L(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$, donde α y β son los ángulos de incidencia y de refracción. De aquí, $a - a' = d/\operatorname{tg} \alpha = L(1 - \operatorname{tg} \beta/\operatorname{tg} \alpha)$. Cuando los ángulos α y β

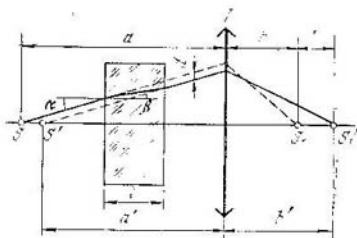


Fig. 4.87.

son pequeños la relación entre sus tangentes puede sustituirse por la relación entre sus senos: $\operatorname{tg} \beta/\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \beta/\sin \alpha = 1/n$. Así, pues,

$$a' = a - L(n - 1)/n = 25 \text{ cm},$$

$$b' = a'/(a'D - 1) = 100 \text{ cm}.$$

La distancia buscada l entre las imágenes es $b' - b$:

$$l = \frac{L(n - 1)}{[(aD - 1)n - LD(n - 1)](aD - 1)} = 40 \text{ cm}.$$

4.52. Si se traza un rayo auxiliar aa' , paralelo al rayo BC , por el centro óptico de la lente L_2 (fig. 4.88), el rayo aa' debe cortar la prolongación del rayo

refractado CD en el plano focal ff' de la lente L_2 . Por lo tanto, la imagen virtual de la fuente S se encontrará en el punto S_2 . Como se ve por la construcción, sobre la lente L_2 incide el haz de rayos que converge en S_1 . En casos como éste suele decirse que S_1 desempeña para la lente L_2 el papel de fuente virtual.

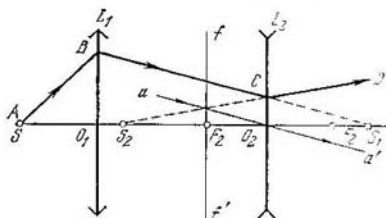


Fig. 4.88.

4.53. Construyendo como de ordinario un rayo auxiliar aa' paralelo al rayo AB , hallamos la dirección del rayo refractado BC (fig. 4.89). Después, con una construcción análoga a la examinada en el problema 4.52, se determina la posición del plano focal de la lente L_1 , la dirección del rayo refractado CD y, por lo tanto, la posición de la imagen S_2 .

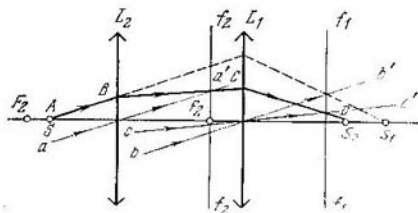


Fig. 4.89.

4.54. En ausencia del espejo plano la imagen S_1 de la fuente se encuentra de la lente a una distancia igual al duplo de la distancia focal. Para que los rayos reflejados en el espejo, después de pasar la segunda vez por la lente, sean paralelos, es necesario que se corten en el foco posterior de la lente. Esto ocurre cuando la distancia entre la lente y el espejo es igual a $3f/2$. La marcha de los rayos se muestra en la fig. 4.90.

4.55. La imagen del ojo obtenida después de pasar los rayos por la lente la segunda vez, se encuentra detrás de ésta ($d > a$), es decir, es virtual. Como por la condición del problema $d = a + f$, dicha imagen se halla en el foco posterior de la lente. En este caso el «objeto» (el punto en el cual convergen los rayos reflejados en el espejo) debe encontrarse de la lente a una distancia a_1 tal, que $1/f = 1/a_1 - 1/f$, de donde $a_1 = f/2 = 5$ cm. Después de pasar los rayos a través de la lente por primera vez, si no estuviera el espejo, la imagen se encontraría a la distancia $b = af/(a - f) = 30$ cm de la lente. Como en el espejo plano el objeto y su imagen están situados simétricamente respecto del espejo, la distancia buscada será $l = a_1 + (b - a_1)/2 = 17,5$ cm.

4.56. Sea d el diámetro del ojo. La imagen en el espejo plano tiene el mismo tamaño y se encuentra a la distancia $2a$ del ojo; por consiguiente, su dimensión angular es $\alpha_0 = d/2a$. Si se coloca la lente, los rayos, después de pasar por

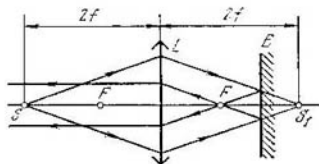


Fig. 4.90.

ella, producen una imagen detrás de la lente a la distancia $b = af/(a - f)$, donde f es la distancia focal de la lente. Al reflejarse en el espejo, los rayos se invierten y la «imagen» se traslada a un punto situado a la distancia b delante de la lente. Cuando los rayos pasan a través de la lente por segunda vez, esta

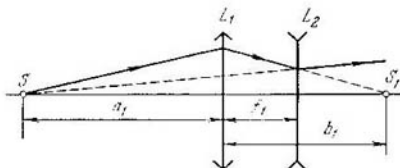


Fig. 4.91

imagen es para la lente el objeto, situado a la distancia b . Por la fórmula de la lente hallamos la posición de la imagen, teniendo en cuenta que ésta es virtual

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}, \quad \text{de donde} \quad b_1 = -\frac{bf}{b+f} - \frac{af}{f-2a}.$$

El aumento de dos lentes es igual al producto de los aumentos de cada una de ellas, por eso la dimensión de la imagen del ojo será $d_1 = d(b/a)b_1/b = df/(f - 2a)$. La distancia desde el ojo hasta la imagen es $l = a + b_1 = 2a(f - a)/(f - 2a)$. La dimensión angular de la imagen es $\alpha = d_1/l = \alpha_0/(f - a)$, $\gamma = \alpha/\alpha_0 = f/(f - a) = 1.5$, de donde $f = 60$ cm.

4.57. Considerando la imagen de la fuente S_1 en la lente L_1 (fig. 4.91) como fuente virtual para la lente L_2 y aplicando la fórmula de la lente (teniendo en cuenta los signos), se obtiene que $f_2 = -f_1^2(a_1 + f_1)/a_1^2 = -9.37$ cm.

4.58. La imagen producida por la lente convergente desempeña el papel de fuente para la lente divergente. La posición de esta imagen la determinamos por la fórmula de la lente (fig. 4.92): $b_1 = a_1 f_1 / (a_1 - f_1) = 30$ cm. Ahora se escribe la fórmula para la lente divergente: $1/a_2 + 1/b_2 = 1/f_2$, donde $f_2 = -16$ cm es la distancia focal de la lente divergente. En esta fórmula los signos están puestos de tal forma que a un objeto o imagen real corresponden a_2 y b_2 positivos, y a un objeto o imagen virtual, a_2 y b_2 negativos. El análisis de la fórmula de la lente divergente muestra que la magnitud $b_2 > 0$ (imagen real) se obtendrá para $f_2 < a_2 < 0$. Por lo tanto, la distancia entre las lentes puede variarse entre los límites de $b_1 - |f_2| = 14$ cm a $b_1 = 30$ cm.

4.59. Si se construyen sucesivamente las imágenes en el sistema de las dos lentes, considerando la primera imagen, producida por la lente L_1 (fig. 4.93),

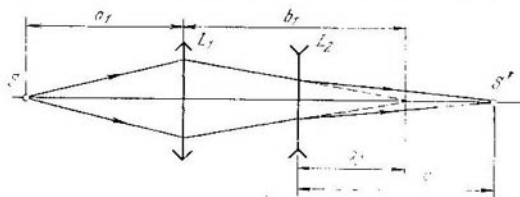


Fig. 4.92.

como fuente (real o imaginaria) para la lente L_2 , se ve fácilmente que este sistema puede dar una imagen derecha (directa) del objeto en dos casos: primero, cuando después de cada sucesiva transformación la imagen sigue siendo derecha, y segundo, cuando después de cada transformación la imagen se obtiene invertida. La posición de las lentes excluye el segundo caso. Por lo tanto, es necesario que la imagen virtual, derecha, producida por la lente L_1 , se encuentre en el trozo O_1F_1 a la izquierda de la lente L_1 . Esta imagen desempeña el papel de fuente real para la lente L_2 , situada a la distancia $a_2 < f_2$; por consiguiente, su imagen (que será definitiva) será derecha y virtual.

Utilizamos para L_1 la fórmula de la lente: $1/a_1 + 1/b_1 = 1/f_1$. Las distancias a_1 y b_1 se miden desde la lente L_1 , pudiendo b_1 variar desde cero hasta $-f_1$ (si $b_1 < 0$, la imagen es virtual). Teniendo en cuenta el intervalo de variaciones de b_1 se obtiene el intervalo de posibles posiciones del objeto: $0 < a_1 \leq f_1/2$.

4.60. $0 < a_1 \leq f_1/3$.

4.61. $a_1 < 2f = 10$ cm.

4.62. $a_1 < f_1(l_2 - l)/(f_1 + f_2 - l) = 10$ cm.

4.63. El aumento es $\beta = f/(a - f) = (b - f)/f$. Para el sistema de lentes,

$\beta = \beta_1\beta_2$, es decir, $\beta = \frac{b_1 - f_1}{f_1} \cdot \frac{f_2}{a_2 - f_2}$. Pero $a_2 = l - b_1$, por lo que $\beta = -\frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{b_1 - f_1}{l - b_1 - f_2}$. El aumento no depende de la posición del objeto ni, por consiguiente, de b_1 , si $(b_1 - f_1)/(l - b_1 - f_2) = A = \text{const.}$, de donde $l = -A^{-1}[b_1(1 + A) - (f_1 - Af_2)]$; l no depende de b_1 si $A = -1$, con lo cual $l = f_1 + f_2$.

4.64. Aplicando dos veces la fórmula de la lente y teniendo en cuenta que $f_1 + f_2 = l$, obtenemos para f_1 la siguiente ecuación cuadrática

$$(a + b + l)f_1^2 - l(2a + l)f_1 + al^2 = 0,$$

de donde hallamos dos soluciones: $f_1' = 40$ cm y $f_1'' = 48$ cm. Respectivamente, para la segunda lente se obtiene $f_2' = 20$ cm y $f_2'' = 12$ cm.

4.65. $\Delta L = l(f_2 - f_1)/(l - (f_2 + f_1)) = 60$ cm, donde l es la distancia entre las lentes y $f_2 + f_1 = 0$.

4.66. $|f_2| = af_1/(a - f_1) - l$, $f_2 = -20$ cm.

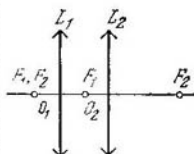


Fig. 4.93.

4.67. Sea α la dimensión angular del Sol. La imagen del Sol en la primera lente se encuentra en su plano focal, su tamaño es $d_1 = \alpha f_1$ (el ángulo α es suficientemente pequeño). Esta imagen se encuentra de la segunda lente a la distancia $a_2 = l - f_1$, siendo $a_2 < 0$. Aplicando la fórmula de la lente, hallamos la

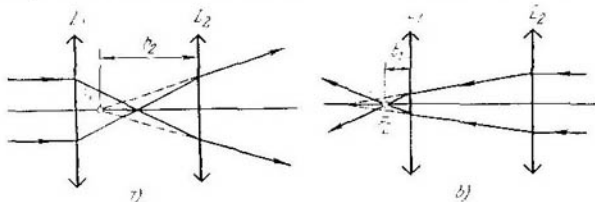


Fig. 4.94.

distancia entre la imagen en la segunda lente y la lente misma: $b_2 = f_2(l_1 - l)/(f_1 + f_2 - l)$, donde $f_2 < 0$. El diámetro de la imagen es $d_2 = d_1 b_2/a_2 = \alpha f_1 f_2/(f_1 + f_2 - l)$. En una sola lente delgada el diámetro de la imagen sería $d = \alpha f$. Como $d = d_2$, se obtiene que $f = f_1 f_2/(f_1 + f_2) = 40$ cm.

4.68. El aumento de un sistema de lentes es igual al producto de los aumentos de cada una de ellas. Aplicando en ambos casos la fórmula de la lente, hallamos que $l = 2f_1 = 4$ cm.

4.69. Se llaman focos principales de un objetivo los puntos en los cuales converge un haz de luz paralelo al eje óptico principal que incide sobre dicho

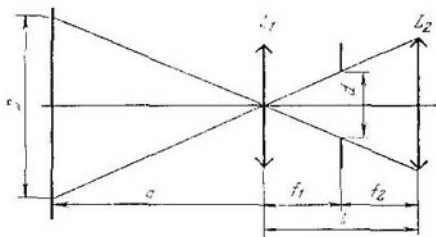


Fig. 4.95.

objetivo por la izquierda y por la derecha. Consideremos el haz incidente por la izquierda (fig. 4.94, a). Como $f_1 < l$ y $l - f_1 < f_2$, el foco F_1 se encuentra entre las lentes a la distancia $b_2 = |(l - f_1) f_2/(l - f_1 - f_2)| = 7,5$ cm de la segunda lente. Si el haz incide por la derecha (fig. 4.94, b), converge en el punto F_2 , que se encuentra a la izquierda de la primera lente a la distancia $b_1 = f_1 f_2 = 2,5$ cm.

4.70. Examinando los haces paralelos que inciden por la izquierda y por la derecha, obtenemos que, en este caso, ambos focos principales se encuentran fuera del sistema de lentes: uno se halla a la derecha de la segunda lente, a la distancia $b_2 = 7,5$ cm, y el otro, a la izquierda de la primera lente, a la distancia $b_1 = 37,5$ cm.

4.71. El aumento angular en este sistema de lentes (telescopio) es igual a la relación de las distancias focales de las lentes: $\gamma = f_1/f_2$. Como $f_1 + f_2 = l$, se obtiene que $f_1 = l\gamma/(\gamma + 1)$. Como puede verse en la fig. 4.95, el diámetro de la región visible es $D = da/f_1 = da(\gamma + 1)/l\gamma = 4$ m.

4.72. La marcha de los rayos en el sistema de lentes se representa en la fig. 4.96. En este caso $f_1/f_2 = \gamma$ y $D = df_1/f_2$, de donde $D = d\gamma = 10$ cm.

4.73. Supongamos que una fuente de luz pequeña se encuentra en el foco de la lente L_1 . Los rayos luminosos, después de refractarse en la lente L_1 , serán paralelos al eje óptico, y después de su refracción en la lente L_2 convergerán en el foco de ésta. Si la distancia entre las lentes es mucho menor que la distancia focal de cada una de las lentes, el sistema de dos lentes se puede considerar como

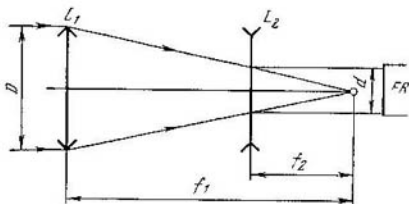


Fig. 4.96

una lente delgada. Aplicando ahora la fórmula de la lente delgada al sistema de las dos lentes, se obtiene que $1/f_1 + 1/f_2 = 1/f$ o $D_1 + D_2 = D$, donde f es la distancia focal del sistema de dos lentes, y D , su potencia óptica.

4.74. Tomando en consideración que la potencia óptica de las lentes delgadas, juntas una a otra, se suman (véase la solución del problema 4.73), obtenemos que

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{12}}, \quad \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_{23}}, \quad \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 0.$$

La última relación se infiere de que al juntar las tres lentes se obtiene un sistema de potencia óptica nula, es decir, una lámina de caras planas paralelas. Resolviendo esta ecuación hallamos que

$$f_3 = -f_{12} > 0, \quad f_1 = -f_{23} > 0, \quad f_2 = f_{12}f_{23}/(f_{12} + f_{23}) < 0.$$

4.75. Como se sabe, la potencia óptica de la lente es $1/f_1 = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2)$, donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura de las superficies convexas de las lentes. En el segundo caso se añade una tercera lente (de agua) con superficies cóncavas, cuyos radios de curvatura son R_1 y R_2 y cuya potencia óptica es $1/f = (n_a - 1)(-1/R_1 - 1/R_2)$. La potencia total es igual a la suma de las potencias ópticas de las lentes componentes (véase la solución del problema 4.73):

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f}, \quad \text{de donde } f_2 = \frac{n-1}{n-n_a} f_1 = 2f_1.$$

$$4.76. f_2 = -\frac{n-1}{n_a-n} f_1 = 2f_1.$$

4.77. Las potencias ópticas de las lentes que se encuentran en medios distintos son

$$1/f = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2) \quad \text{en el aire,}$$

$$1/f_1 = (n/n_1 - 1)(1/R_1 + 1/R_2) \quad \text{en el agua,}$$

$1/f_2 = (n/n_2 - 1) (1/R_1 + 1/R_2)$ en el bisulfuro de carbono. Resolviendo conjuntamente estas ecuaciones se halla

$$f = \frac{n_1 - n_2}{n_2(n_1 - 1)/f_2 - n_1(n_2 - 1)/f_1} = 36 \text{ cm.}$$

4.78. La lente gruesa puede considerarse como la suma de una lente delgada y una lámina de caras planas paralelas. La potencia óptica de la lente delgada en el aire es $1/f = (n - 1)/R$, de donde $f = R/(n - 1) = 5 \text{ cm}$. Examinemos la marcha de un rayo, paralelo al eje óptico principal, a través de este sistema (fig. 4.97). En ausencia de la lámina de vidrio, el rayo, después de pasar por la lente, llegaría al punto O' (puesto que el espesor de la lámina es igual a la



Fig. 4.97.

distancia focal de la lente). Refractándose dos veces en las superficies de la lámina, el rayo emerge de ella bajo el mismo ángulo α con el eje y lo corta en el punto O . Hallamos la distancia OO' (que designaremos por a). Como los ángulos son pequeños, por la ley de la refracción tenemos que $\alpha = \beta n$. En la fig. 4.97 puede verse que $\alpha f = \beta f + \alpha a$, de donde $a = f(\alpha - \beta)/\alpha = R/n = 5/3 \text{ cm}$. Si sobre la lente inciden por la derecha rayos paralelos, éstos no se refractan en la lámina plano paralela y se enfocan a la distancia $f = 5 \text{ cm}$ a la izquierda de la lente.

4.79. El foco se encuentra a la izquierda (lente divergente) a la distancia $a = R(2n - 1)/(n - 1) = 8 \text{ cm}$ de la superficie plana, si los rayos inciden por la derecha (véase la solución del problema 4.78).

Espejos esféricos

4.80. Tracemos rectas que pasen por los extremos del objeto y de la imagen, por los puntos A y A_1 , B y B_1 (fig. 4.98). Estas rectas son perpendiculares a la

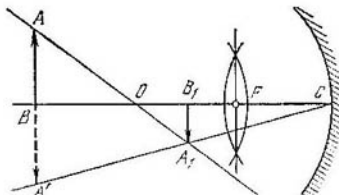


Fig. 4.98.

superficie del espejo y su punto de intersección O es el centro óptico de la curvatura del espejo. Tomemos un punto A' , simétrico al punto A respecto del eje

BB_1 . La recta $A'A_1$ corta al eje en el punto C , que se encuentra en la superficie del espejo. El arco de radio OC con centro en el punto O es la superficie del espejo. Como se ve por la construcción es cóncavo y la imagen A_1B_1 , real. Dividiendo por la mitad el segmento OC se halla el foco F del espejo.

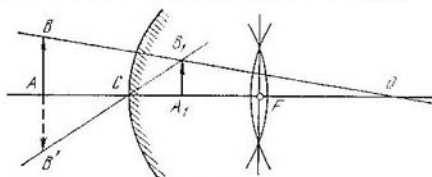


Fig. 4.99.

4.81. La construcción se hace de un modo análogo a la del problema 4.80. El espejo resulta ser convexo y la imagen, virtual (fig. 4.99).

4.82. Sean a , la distancia desde la fuente S hasta el espejo; b , la distancia desde la imagen S_1 hasta el espejo (fig. 4.100), y f , la distancia focal del espejo.

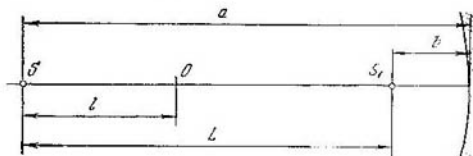


Fig. 4.100.

Entonces $a = 2f + l$, $b = 2f + l - L$. Por la fórmula del espejo hallamos que $1/(2f + l) + 1/(2f + l - L) = 1/f$, de donde $f = l(L - l)/(2l - L)$. El problema tiene solución si $2l > L > l$, en este caso $f > 0$.

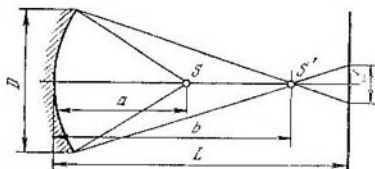


Fig. 4.101.

4.83. Hay dos soluciones posibles de este problema:

a) Cuando la imagen S' de la fuente y el espejo se encuentran delante de la pared (fig. 4.101), tenemos que

$$(L - b)/b = d/D, \text{ de donde } b = L/(1 + d/D)$$

Por la fórmula del espejo se halla

$$a = bf/(b - f) = Lf/[L - f(1 + d/D)] = 1,14 \text{ m.}$$

b) Cuando la imagen S' de la fuente se encuentra más allá de la pared, se tiene que

$$(b - L)b = d/D,$$

de donde

$$b = L/(1 - d/D).$$

Por la fórmula del espejo se halla

$$a = Lf/[L - f(1 - d/D)] = 1,04 \text{ m.}$$

$$4.84. D = 2r/Lf + d = 3,5 \text{ m.}$$

4.85. Utilizando las designaciones de la fig. 4.102, tenemos que

$$1/a + 1/b = 1/f, \quad H/h = b/a = 3 \quad \text{y} \quad b - a = l.$$

Teniendo en cuenta los datos del problema, de las últimas relaciones se obtiene que $a = 10 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$ y, por consiguiente,

$$f = ab/(a + b) = 7,5 \text{ cm.}$$

4.86. Las imágenes se encuentran a las distancias $(2n - 1)f/n$ de cada uno de los espejos, siendo n un número entero positivo cualquiera.

4.87. Hallamos la posición de la imagen que se forma al reflejarse los rayos primero en el primer espejo y después en el segundo (al hacer esto se tiene en

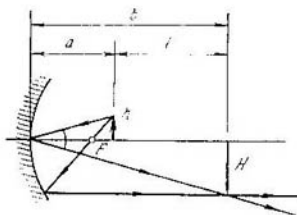


Fig. 4.102.

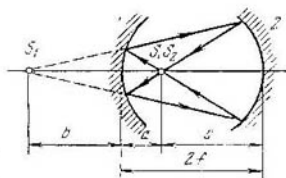


Fig. 4.103.

cuenta que la imagen que se obtiene en el primer espejo desempeña el papel de fuente para el segundo espejo): $1/a + 1/b = 1/f$ o $b = af/(a - f)$, donde b es la distancia desde la imagen S_1 hasta el primer espejo. Si $b > 0$, la imagen en el primer espejo es real; si $b < 0$, virtual. La distancia desde la imagen S_2 hasta el segundo espejo es igual a $2f - b$ (fig. 4.103). Por consiguiente, $1/(2f - b) + 1/c = 1/f$, donde c es la distancia desde la segunda imagen S_2 hasta el segundo espejo. Después de hacer algunas transformaciones fáciles se obtiene que $c = f(2f - b)/(f - b) = 2f - a$. Por lo tanto, la imagen que se obtiene después de reflejarse los rayos en ambos espejos coincide con la fuente misma.

4.88. El punto S de intersección de los rayos desempeña el papel de fuente virtual, situada a la distancia $a_1 = -a$ del espejo (fig. 4.104). Aplicando la fórmula del espejo se obtiene que $-1/a + 1/b = 1/f$ ($f = (R/2)$), por consiguiente, $b = af/(a + f) = aR/(2a + R) = 10 \text{ cm}$. En este caso $b > 0$; esto significa que el punto de intersección de los rayos reflejados es real.

4.89. El punto S de intersección de los rayos desempeña el papel de fuente virtual, situada a la distancia $a_1 = -a$ del espejo (fig. 4.105). Para hallar la

distancia b desde el espejo hasta la imagen S_1 escribimos la fórmula del espejo: $-1/a + 1/b = 1/f$ ($f = -R/2$). De aquí $b = af/(a + f) = aR/(R - 2a)$. Cuando $a = 15$ cm y $R = 60$ cm se obtiene que $b = 30$ cm ($b > 0$, la imagen es

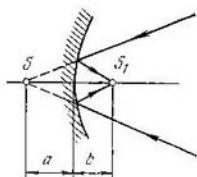


Fig. 4.104.

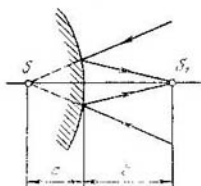


Fig. 4.105.

real). Cuando $a = 40$ cm y $R = 60$ cm resulta que $b = -120$ cm ($b < 0$, la imagen es virtual).

4.90. Aplicando la fórmula del espejo, tenemos que $1/a + 1/b = 2/R$, de donde la distancia desde el espejo hasta la imagen es $b = aR/(2a - R)$. La distancia desde el ojo (objeto) hasta la imagen es $l = a - b = 2a(a - R)/(2a - R)$. Si el tamaño lineal del ojo es y , el de la imagen será $y' = y |b/a| = y |R/(2a - R)|$. El ángulo bajo el cual se ve el ojo es $\alpha = y'/l = y |R/2a \times (a - R)|$. El ángulo bajo el cual se vería el ojo en un espejo plano sería

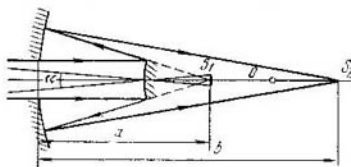


Fig. 4.106.

$\alpha_0 = y/2a$. El aumento angular $\gamma = \alpha/\alpha_0 = |R/(a - R)|$, de donde $R = a\gamma/(\gamma - 1) = 54$ cm ($R/2 > a$, la imagen es virtual).

4.91. $R = (l_2^2 - l_1^2)/2l_2 = 4,2$ cm.

4.92. Sobre el primer espejo incide un haz de rayos paralelo y la imagen S_1 (virtual) se obtiene en el foco del espejo E_1 (fig. 4.106). La distancia hasta la imagen S_2 en el segundo espejo la hallamos por la fórmula

$$\frac{1}{R_2 - R_1/2} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R_2},$$

de donde

$$b = \frac{R_2(2R_2 - R_1)}{2(R_2 - R_1)}.$$

Si la dimensión angular del Sol es α , el tamaño lineal de su imagen en el primer espejo será $y_1 = \alpha R_1/2$, y en el segundo espejo

$$y_2 = y_1 \frac{b}{a} = \alpha \frac{R_1}{2} \frac{R_2(2R_2 - R_1) \cdot 2}{2(R_2 - R_1)(2R_2 - R_1)} = \alpha \frac{R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}.$$

En la lente el tamaño de la imagen del Sol es $y = \alpha f$; por consiguiente, $l = R_1 R_2 / 2 (R_2 - R_1) = 10$ cm.

4.93. $f = R_1 R_2 / 2 (R_2 - R_1) = 5$ cm.

4.94. Se construye la marcha del rayo que incide paralelamente al eje del recipiente (fig. 4.107). El punto F es el foco del sistema (en él convergen los rayos paralelos después de reflejarse en el espejo). En ausencia del agua, el foco del

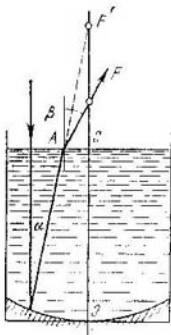


Fig. 4.107

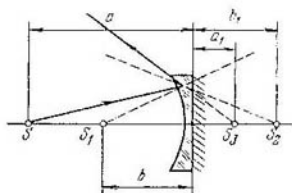


Fig. 4.108.

espejo se encontraría en el punto F' ; en este caso el segmento $OF' = R/2$. Aplicando la ley de la refracción y teniendo en cuenta que los ángulos α y β son pequeños, se halla

$$OF \approx H/2 + (R - H)/2n = 36,3 \text{ cm.}$$

4.95. Vamos a considerar la lente planocóncava con la superficie plana plateada como un sistema formado por una lente y un espejo plano ajustado a ella (fig. 4.108). La posición de la primera imagen se determina por la fórmula de la lente: $b = af/(a - f)$ ($f < 0$). La segunda imagen S_2 , que se forma después de la reflexión de los rayos en el espejo, pero sin tener en cuenta el paso de los rayos a través de la lente por segunda vez, se encuentra a la distancia $b_1 = -b$. Finalmente, después de pasar por segunda vez a través de la lente, los rayos convergen en el punto S_2 , cuya posición se halla por la fórmula de la lente: $a_1 = b_1 f / (b_1 - f) = af / (2a - f)$. Como $f < 0$, cualquiera que sea a la imagen será virtual (es decir, $a_1 < 0$).

4.96. El espejo puede colocarse a la distancia R detrás de la imagen de la fuente o en el lugar que ocupa ésta. En el primer caso los rayos reflejados marchan en sentido contrario por el mismo camino; en el segundo caso los rayos, al reflejarse, se intercambian, pero parten del mismo punto (fig. 4.109). Al desplazar el espejo hacia la derecha desde el punto S_1 , la imagen empieza a correrse hacia la derecha desde el punto S y se aleja en el sentido $x = +\infty$; luego la imagen aparece cuando $x = -\infty$ y tiende hacia el punto S (al desplazarse el espejo la distancia R).

4.97. El aumento de la imagen no depende de la posición del objeto si el rayo, paralelo al eje óptico, que va del objeto a la lente, sigue siendo paralelo al eje después de reflejarse en el espejo y de pasar por la lente (fig. 4.110). Esto es posible cuando el foco posterior de la lente coincide con el centro de curvatura del espejo (punto O). En este caso $l = f_1 - R_e = f_1 - 2f_e = 5$ cm.

4.98. $f_e = (f_1 + D)/2 = 6$ cm.

4.99. Son posibles tres casos de disposición mutua de la lente y el espejo en que el aumento del sistema es $\beta = 1$: a) el centro del espejo se encuentra en el plano de la imagen del objeto producida por la lente, en este caso la distancia entre el espejo y la lente $x_1 = b$; b) el foco de la lente coincide con el centro de curvatura del espejo, entonces la distancia entre el espejo y la lente $x_2 = f_1 + R$, y c) la imagen creada por la lente se encuentra en el centro de curvatura del espejo, en estas condiciones la distancia entre el espejo y la lente $x_3 = b + R$.

El desplazamiento del espejo no dependerá de su radio de curvatura si la traslación tiene lugar entre los puntos 2 y 3: $l = x_3 - x_2 = b - f$. Por la fórmula de la lente $b = af/(a - f)$; es decir, $l = af/(a - f) - f$, lo que conduce

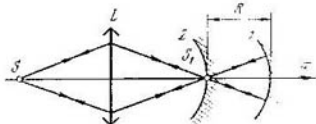


Fig. 4.109.

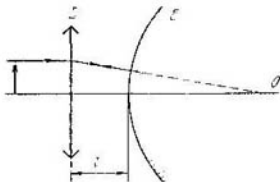


Fig. 4.110.

a una ecuación cuadrática respecto de f : $f^2 + lf - la = 0$, de donde $f = 6$ cm. La segunda raíz de esta ecuación es negativa y, por consiguiente, no satisface la condición del problema.

4.100. $a = f(f - l)/l = 40$ cm.

4.101. La imagen S_1 se forma al reflejarse los rayos en la parte del espejo no tapada por la lente. La imagen S_2 se origina cuando los rayos se reflejan en el espejo y pasan dos veces por la lente (fig. 4.111). Sean f , la distancia focal del espejo y f_1 , la distancia focal del sistema constituido por la lente y el espejo ajustados entre sí. Entonces

$$1/a + 1/b_1 = 1/f \quad \text{y} \quad 1/a + 1/b_2 = 1/f_1.$$

Restando término a término la primera ecuación de la segunda resulta que $1/b_2 - 1/b_1 = 1/f_1 - 1/f$. Es fácil demostrar que $1/f_1 = 1/f + 2/f_1$, donde f_1 es la distancia focal de la lente. Para hacer esta demostración suponemos que la fuente puntual de luz se encuentra a la distancia f_1 (en el foco de la lente) del sistema lente-espejo.

Los rayos luminosos, después de pasar por la lente, inciden sobre el espejo paralelamente al eje óptico. Luego de reflejarse en el espejo, estos rayos convergerían, si no se tuviera en cuenta su paso por segunda vez a través de la lente en el foco del espejo, es decir, a la distancia f del sistema. De hecho, después de atravesar la lente por segunda vez, los rayos convergen a cierta distancia a del sistema, la cual es fácil de determinar por la fórmula de la lente; en este caso el foco del espejo debe considerarse con respecto a la lente como fuente virtual: $-1/f + 1/a = 1/f_1$. Esta relación puede escribirse también en la forma $1/f_1 + 1/a = 1/f + 2/f_1$ y considerarse como fórmula para el sistema lente-espejo. Como se ve por esta fórmula, la potencia óptica del sistema es $1/f_1 = 1/f + 2/f_1$, que es lo que se quería demostrar. De este modo,

$$\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f} = \frac{2}{f_1}, \quad \text{de donde} \quad f_1 = \frac{2b_1b_2}{b_1 - b_2} = 25 \text{ cm}$$

4.102. $f = -R = 60$ cm.

4.103. La imagen invertida es siempre real y el espejo, en este caso, cóncavo. Por consiguiente, la distancia hasta la imagen es $b = af/(a - f)$ y su aumento, $\beta = b/a = f/(a - f)$. En el sistema lente—espejo la imagen es derecha, es decir, virtual. Como el aumento es el mismo que antes, la imagen se encuentra a la distancia b del espejo. La potencia óptica del sistema es igual a $1/f + 2/f_1$ (véase la solución del problema 4.101). Así, se obtiene que

$$1/f + 2/f_1 = 1/a - 1/b, \text{ de donde } f_1 = af/(f - a);$$

$f_1 < 0$, ya que $a > f$ (la imagen en el espejo es real).

4.104. $R = af/(f - a) = -30$ cm.

4.105. El líquido vertido en el espejo se puede considerar como una lente planoconvexa cuya potencia óptica es $1/f_1 = (n - 1)/R$. La potencia óptica

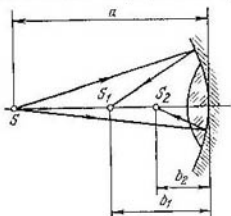


Fig. 4.111.

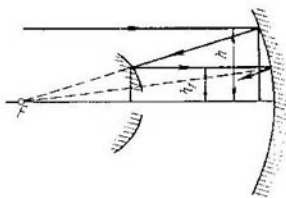


Fig. 4.112.

del sistema lente—espejo (véase la solución del problema 4.101) es

$$1/f_e + 2/f_1 = 2/R + 2(n - 1)/R = 2n/R.$$

Como la estrella es una fuente infinitamente lejana, su imagen se encuentra en el foco del sistema, es decir, $0,7a = R/2a$. Sin el líquido $a = R/2$. Por lo tanto, $n = 1/0,7 = 1,43$.

4.106. Una imagen se forma con los rayos que pasan a través de la capa semitransparente y otra, con los que se reflejan en ella. En el primer caso la imagen la produce la lente, en el segundo, el sistema lente—espejo. Como las imágenes son iguales, las potencias ópticas de la lente y del sistema también lo son: $1/f = 1/f_e + 2/f_1$, de donde se obtiene que $f_e = -f$, o sea, que el radio de curvatura de la superficie posterior de la lente es $R_2 = -2f = 20$ cm. El radio de curvatura R_1 se halla por la conocida fórmula

$$1/f = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2), \text{ de donde } R_1 = 2f(n - 1)/(n + 1) = -4 \text{ cm.}$$

La lente es cóncavoconvexa. Si $f = +5$ cm, $R_1 = +2$ cm y $R_2 = -10$ cm, la lente es convexoconvexa.

4.107. $f = a = +34$ cm.

4.108. $f = 2a = 56$ cm.

4.109. De los datos del problema se infiere que el sistema es confocal, es decir, que los focos de los espejos E_1 y E_2 coinciden. Por lo tanto, el rayo que paralelamente al eje óptico va hacia el espejo E_1 y que después de reflejarse en él marcha en dirección al foco, una vez reflejado en el espejo E_2 vuelve a ir paralelo al eje óptico, pero más abajo (fig. 4.112). Como $h \ll L$, de la semejanza de los triángulos se obtiene que, después de la primera reflexión, $h_1 = h/2$ ($f = L$), y después de la n -ésima reflexión, $h_n = h/2^n$. El rayo sale del sistema cuando $h_n \ll d/2$. De aquí resulta que $20 \ll 2^n$ y $n \geq 5$, es decir, el rayo sale del sistema después de reflejarse 5 veces. El camino que recorre dentro del sistema es $l = 9L$, y el tiempo que se retrasa el rayo, $\tau = 9L/c = 1,5 \cdot 10^{-7}$ s.

4.110. $\tau = 6L/c = 1,1 \cdot 10^{-7}$ s.

Instrumentos ópticos

4.111. $f = L/(1 + \beta) = 9,95$ cm, donde $\beta = 200$ es el aumento del objetivo.

4.112. Teniendo en cuenta que las potencias ópticas del objetivo y de la lente adicional se suman, resulta que $\beta = \frac{L(1 + f_1/f_2) - f_1}{L - f_1}$.

4.113. Las lentes no están ajustadas una a otra, no pueden sustituirse por una lente cuya potencia óptica sea igual a la suma de las de ellas dos y hay que

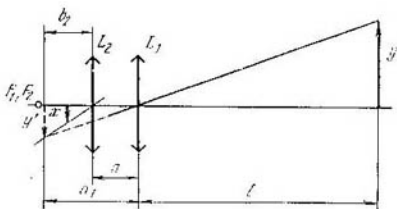


Fig. 4.113.

considerar sucesivamente la marcha de los rayos a través de cada una de las lentes (fig. 4.113). La imagen que da la lente L_1 es aumentada y real, por lo que el «objeto», es decir, la imagen que produce la lente L_2 , debe encontrarse entre el foco y el duplo de la distancia focal de la lente L_1 . Como $a < f_1$, la imagen que da la lente L_2 debe ser virtual. Y como $L \gg f_1$, será $a_1 \approx f_1$ y el aumento de la lente L_1 es $\beta_1 \approx L/f_1 = 50$. La distancia desde la imagen y' hasta la lente L_2 es $b_2 = a_1 - a \approx f_1 - a$. El aumento de la lente L_2 será $\beta_2 = (b_2 + f_2)/f_2 = 2$, ya que la imagen es virtual. Y el aumento total del sistema es $\beta = \beta_1 \times \beta_2 = 100$.

4.114. $\varphi = d/f = 7 \cdot 10^{-8}$ rad.

4.115. Examinemos la marcha de los rayos en la lente de las gafas (fig. 4.114). El ojo provisto de la lente ve la imagen virtual S_1 del objeto S . La potencia óptica de la lente debe elegirse de forma que esta imagen se encuentre a la distancia $b = d_1$ de visión óptima del ojo hipermetrope cuando el objeto se halle a la distancia de visión óptima de un ojo normal ($a = d = 25$ cm). En este caso el ojo hipermetrope, provisto de la lente, equivaldrá a un ojo normal. Por lo tanto, $D = 1/f = 1/d = 1/d_1 = 2$ dptr.

4.116. El punto lejano de acomodación del ojo normal se encuentra en el infinito; el punto lejano del ojo miope, a la distancia $d_1 = 20$ cm. Los lentes correctores del defecto de este ojo deben ser tales, que un objeto infinitamente lejano parezca que se encuentra a la distancia $d_1 = 20$ cm. Por consiguiente, $f = -20$ cm y $D = -5$ dptr.

Observación. Se trata de lentes para ver de lejos. Estos lentes, en general, pueden no servir para ver de cerca (por ejemplo, para leer).

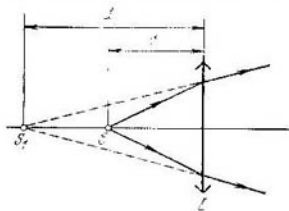


Fig. 4.114.

4.117. Para el punto próximo de acomodación tenemos que $1/a_1 - 1/d_1 = 1/f$, donde a_1 y d_1 son, respectivamente, las distancias hasta los puntos próximos de acomodación del ojo con lentes y sin ellos, y f es la distancia focal de la lente de las gafas. Por lo tanto, $a_1 = d_1 f / (d_1 + f) \approx 16,7$ cm. Análogamente, para el punto lejano de acomodación se obtiene que $a_2 = d_2 f / (d_2 + f) = \infty$.

4.118. El ojo ve la imagen virtual S_1 del objeto S , la cual se forma al refractarse los rayos luminosos en el límite agua—aire (fig. 4.115). La distancia l desde la imagen hasta la superficie del agua está relacionada con la profundidad d a que está sumergido el objeto por medio de la igualdad $l = d/n$ (véase la solución del problema 4.2). De este modo, el punto lejano de acomodación del ojo

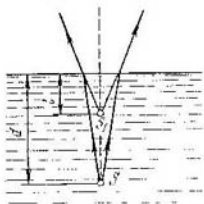


Fig. 4.115.

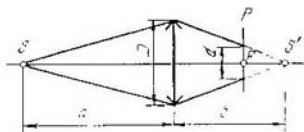


Fig. 4.116.

miope se encuentra a la distancia $l \approx 23$ cm; por consiguiente, el miopo debe usar lentes cuya distancia focal sea

$$f = -23 \text{ cm}; \quad D \approx -4,5 \text{ dptr.}$$

4.119. $D = 2$ dptr.

4.120. $l = d/2 (1 - Dd) = 6,25$ cm, donde $d = 25$ cm.

4.121. Como la cámara fotográfica está enfocada al infinito, la película se encuentra en el plano focal del objetivo (fig. 4.116). Del punto S , situado a la distancia a de la cámara, se obtendrá una imagen nítida a la distancia b en el punto S' . Este se representará sobre la película como un círculo de diámetro $d = 0,1$ mm. En este caso $D/d = b/(b - f)$. Aplicando la fórmula de la lente se halla que $a = f^2/2d = 12,5$ m.

4.122. $v = d(a - f)/f\tau = 10$ m/s.

4.123. $\tau = d(a - f)/f \sqrt{2gH} = 5 \cdot 10^{-3}$ s.

4.124. $H \leq l/d = 400$ m, $v < l/\tau = 50$ m/s = 180 km/h.

4.125. $l = dH/f = 10$ m, $\tau \leq l/v = 1,25 \cdot 10^{-3}$ s, donde v es la primera velocidad cósmica.

4.126. El aumento del objetivo es igual al producto de los aumentos de cada una de las lentes. Como $H \gg f_1$, la imagen se obtiene en el plano focal y el aumento de la primera lente es $\beta_1 = f_1/H$. La distancia desde esta imagen hasta la segunda lente es $a_2 = a - f_1$, y el aumento de la segunda lente, $\beta_2 = f_2/(a - f_1 - f_2)$. El aumento del objetivo es $\beta = \beta_1 \beta_2 = f_1 f_2 / H(a - f_1 - f_2) = 2 \cdot 10^{-4}$. Las dimensiones del trozo de comarca fotografiado son $X = x/\beta = 120$ m e $Y = y/\beta = 180$ m.

4.127. $\beta_2/\beta_1 = h(a - f)/f^2 \div 1 = 5,5$.

4.128. Para que las imágenes de las dos fuentes puntuales S_1 y S_2 no se superpongan es necesario que la distancia x entre los centros de los círculos brillantes sea igual o mayor que el diámetro d de un círculo (fig. 4.117). Si $a \gg f$, las imágenes de las fuentes S_1 y S_2 se encuentran prácticamente en el plano focal de la lente, es decir, $b \approx f$. Por lo tanto, $x = f/a$. Para que las imágenes de las fuentes no se superpongan debe cumplirse la condición $f/a \geq d$, de donde $a_{\min} = fl/d = 5$ m.

4.129. Si el diámetro del objetivo de la cámara fotográfica es D y el poder resolutivo de la película γ , por consiguiente, la borrosidad permisible de los

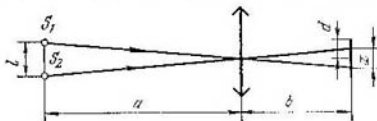


Fig. 4.117.

detalles de la imagen es igual a l , por la fig. 4.118 se ve que

$$\frac{l}{D} = \frac{b_0 - b_2}{b_2} = \frac{b_1 - b_0}{b_1}, \quad 2/b_0 = 1/b_1 + 1/b_2$$

Por la fórmula de la lente

$$1/b = 1/f - 1/a, \quad 2/a_0 = 1/a_1 + 1/a_2,$$

$$a_0 = 2a_1a_2/(a_1 + a_2) = 10 \text{ m.}$$

4.130. El límite lejano se encuentra en el infinito.

4.131. La distancia entre las pupilas de un hombre es $R_0 \approx 65 \text{ mm}$ y en la fotografía, $R \approx 6.5 \text{ mm}$, es decir, el aumento del objetivo es $\beta_1 \approx R/R_0 \approx 0.1$ (está claro que ésta es una valoración aproximada, lo mismo que todas

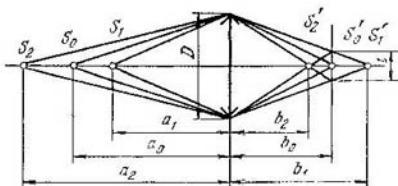


Fig. 4.118.

las demás). La anchura de la palma de la mano es $d_0 \approx 8 \text{ cm}$, y en la fotografía, $d \approx 1.5 \text{ cm}$; por consiguiente, para las palmas de las manos el aumento es $\beta_2 \approx d/d_0 \approx 0.19$. La distancia desde los ojos hasta las palmas de las manos cuando los brazos están medio doblados es $l_0 \approx 40 \text{ cm}$. Si a es la distancia desde las palmas de las manos hasta el objetivo, la distancia desde las pupilas hasta el objetivo es igual a $a + l_0$. Con esto el aumento del objetivo será $\beta_2 = f/(a - f)$ y $\beta_1 = f/(a + l_0 - f)$. De estas ecuaciones se halla que

$$f = \frac{l_0\beta_1}{1 + \beta_1 - \beta_1(1 + 1/\beta_2)} \approx 8.5 \text{ cm,}$$

$$a = \frac{f(1 + \beta_2)}{\beta_2} \approx 54 \text{ cm.}$$

El tamaño del pez pescado (es decir, la distancia entre las palmas de las manos) en la fotografía es $L_0 \approx 8.5 \text{ cm}$, siendo en este caso el aumento igual a β_2 . Por lo tanto, el tamaño de dicho pez en realidad es $L = L_0/\beta_2 \approx 45 \text{ cm}$. En la foto se ve que las imágenes de las pupilas son nítidas, pero las de las manos son borro-

sas, es decir, sobre la película está enfocada la imagen del ojo. La distancia desde el objetivo hasta la película es $b_0 = (a + l_0)/(a + l_0 - f) = 9,3$ cm, y la distancia hasta las imágenes de las manos, $b_1 = af/(a - f) = 10$ cm. Vamos a considerar que la borrosidad de los detalles de las imágenes de las manos es $l = 0,2$ mm. Utilizando la fig. 4.118, obtenemos el diámetro del objetivo: $D = lb_1/(b_1 - b_0) = 3$ mm.

4.132. La distancia b_1 desde el objetivo hasta la primera imagen la hallamos por la fórmula de la lente: $b_1 = a_1 f_1 / (a_1 - f_1)$. El tamaño de la primera imagen es $y_1 = b_1 x / a_1 = f_1 x / (a_1 - f_1)$, donde x es el tamaño del objeto. La

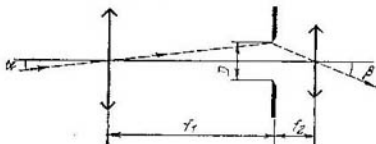


Fig. 4.119.

distancia a_2 desde la primera imagen hasta el ocular se determina por la fórmula de la lente teniendo en cuenta que la segunda imagen (virtual) debe encontrarse a la distancia $b_2 = -d$, siendo d la distancia de visión óptima para un ojo normal: $a_2 = df_2/(d + f_2)$. El tamaño de la segunda imagen es $y_2 = dy_1/a_2 = = f_1(d + f_2)x/f_2(a_1 - f_1)$. De aquí se halla el aumento

$$\alpha = y_2/x = f_1(d + f_2)/f_2(a_1 - f_1) \approx 370.$$

Ahora determinamos la longitud del microscopio:

$$l = b_1 + a_2 = a_1 f_1 / (a_1 - f_1) + df_2 / (d + f_2) \approx 16,8 \text{ cm.}$$

4.133. En el anteojo, enfocado al infinito, la distancia entre el objetivo y el ocular es igual a la suma $f_1 + f_2$. La primera imagen de los objetos lejanos se sitúa en el plano focal común del objetivo y del ocular; en este plano debe colocarse el diafragma del campo visual. El diámetro del diafragma determina el ángulo del campo visual. Este ángulo es igual a 2α (fig. 4.119). Tomando en consideración la pequeñez del ángulo α puede escribirse que $2\alpha \approx 2 \operatorname{tg} \alpha = = D/f_1 = 0,04 \text{ rad} \approx 2^\circ 15'$. Un haz de luz paralelo, que penetre en el objetivo bajo el ángulo α , saldrá del ocular bajo el ángulo β . El aumento angular es

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{D/2f_2}{D/2f_1} = \frac{f_1}{f_2} = 7,5.$$

Observación. El ojo posee una amplia zona de acomodación. Para el ojo humano normal esta zona se extiende desde una distancia de, aproximadamente, 10 cm, hasta el infinito. Cuando el ojo se provee de un instrumento óptico (lentes, lupa, microscopio o anteojo), la imagen virtual del objeto que observa el ojo debe encontrarse, claro está, en la zona de acomodación. Pero su posición, incluso para un mismo individuo, puede variar dentro de amplios límites de un experimento a otro, lo que prácticamente no se refleja en la calidad de la imagen que se observa. Al variar la acomodación, el instrumento aplicado al ojo debe volverse a enfocar (en el caso del microscopio, por ejemplo, esto se consigue desplazando el tubo respecto del objeto y en el caso del anteojo, desplazando el ocular respecto del objetivo). Por lo tanto, la marcha de los rayos en el instrumento depende de cómo está acomodado el ojo en cada caso.

Al calcular las características de los instrumentos ópticos suele suponerse que el ojo está acomodado al infinito (en cuyo caso la marcha de los rayos resulta ser más simple) o a la distancia de visión óptima (igual para el ojo normal a 25 cm). Si en las condiciones del problema no se hace la correspondiente indi-

cación, se recomienda resolverlo suponiendo que el ojo está acomodado al infinito. Esto lleva a la conclusión de que la longitud del anteojo debe ser igual a la suma de las distancias focales del objetivo y del ocular.

$$4.134. \Delta l = f^2/(a - f) = 5 \text{ mm.}$$

4.135. Como $a < f_1$, el objetivo da una imagen virtual del objeto. La posición de esta imagen se determina por la fórmula de la lente. Utilizando las designaciones de la fig. 4.120, tenemos que

$$1/a + 1/b = 1/f_1 \text{ o } b = af_1/(a - f_1) \quad (b < 0).$$

El tamaño de la imagen virtual es $y' = |b| x/a = f_1 x/(f_1 - a)$, donde x es el tamaño del objeto. Como el anteojo está enfocado al infinito, la distancia entre el objetivo y el ocular es igual a la suma de las distancias focales $f_1 + f_2$ (véase

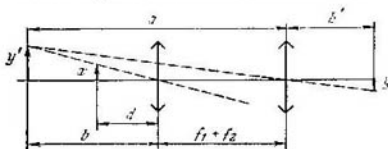


Fig. 4.120.

la observación a la solución del problema 4.133); por consiguiente, la distancia desde la imagen virtual hasta el ocular es

$$a' = -b + f_1 + f_2 = (f_1^2 + f_1 f_2 + af_2)/(f_1 - a).$$

La distancia $a' > f_2$; por lo tanto la imagen creada por el ocular será real. La distancia b' desde el ocular hasta la imagen la hallamos por la fórmula de la lente:

$$b' = a' f_2 / (a' - f_2) = f_2 (f_1^2 + f_1 f_2 + af_2) / f_1^2$$

Ahora hallamos el tamaño de la imagen: $y = b' y' / a' = f_2 x / f_1$. Así, pues, el aumento es $\beta = y/x = f_2/f_1 = 0,1$. Conviene advertir que β no depende de la posición de la fuente.

4.136. La imagen virtual se encuentra a la distancia $-f_2 (f_1^2 + f_1 f_2 - af_2)/f_1^2$ del ocular. El aumento es $\beta = -f_2/f_1 = 1/10$ (véase la solución del problema 4.135).

4.137. Como el objeto está lejos, la imagen en la primera lente (objetivo) se encuentra en el plano focal de ésta, a la distancia f_1 . Con esto la distancia hasta la segunda lente (ocular) es $a_2 = L - f_1$. Por la fórmula de la lente, la distancia desde el ocular hasta la imagen es

$$b_2^* = (L - f_1) f_2 / (L - f_1 - f_2) = -7,5 \text{ cm,}$$

$$b_1^* = (L - f_1) f_2 / (f_2 - f_1 - f_2) = -45 \text{ cm.}$$

El signo menos significa que la imagen es virtual. Si el ojo se aplica inmediatamente detrás del ocular, el observador puede ver claramente los objetos que se encuentran a distancias desde 7,5 hasta 45 cm.

4.138. La distancia L desde el objetivo hasta el ocular varía entre los límites

$$f_1 + b_2 f_2 / (b_2 + f_2) \leq L \leq f_1 + f_2, \text{ es decir, } 37,5 \text{ cm} \leq L \leq 38 \text{ cm.}$$

4.139. El objetivo del anteojo de Galileo da en el plano focal una imagen del Sol cuyo diámetro es $d = \alpha f_1$. Esta imagen sirve de fuente virtual para el ocular (fig. 4.121). Tenemos que $1/a + 1/b = 1/f_2$ ($a < 0$, $f_2 < 0$). Pero $a = L - f_1$, de donde $L = f_1 + b f_2 / (b - f_2) = 54 \text{ cm}$. Después, de la relación $D/d = b/(f_1 - L)$, hallamos el diámetro de la imagen del Sol: $D = \alpha f_1 b / (f_1 - L) = 2 \text{ cm}$.

Para el anteojo de Kepler se recomienda al lector que resuelva el problema él solo. La respuesta es: $L = 43,7$ cm y $D = 1,4$ cm.

4.140. Con los gemelos se observan objetos lejanos situados a una distancia mucho mayor que f_1 . Por eso puede considerarse que la primera imagen S_1 , creada por el objetivo, se encuentra en el plano focal de éste (fig. 4.122). Esta

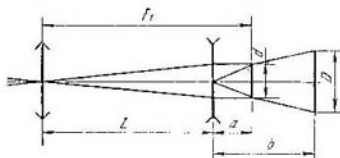


Fig. 4.121.

imagen desempeña para el ocular el papel de fuente virtual situada a la distancia $a_1 = -a$ de él. La imagen S_2 que da el ocular se encuentra a la distancia $b_1 = -d$, donde $d = 25$ cm (distancia de visión óptima del ojo normal). Aplicando la fórmula de la lente se obtiene que $a = -d f_2 / (d + f_2) = 4,76$ cm. La distancia entre el objetivo y el ocular es $L_1 = f_1 - a = 3,24$ cm. Cuando el ojo

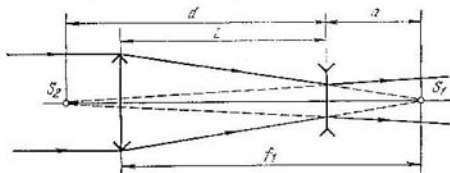


Fig. 4.122.

está acomodado al infinito, los focos del objetivo y del ocular coinciden y, por lo tanto, $L_1 = f_1 + f_2 = 4$ cm y $L_1 - L = 0,76$ cm.

4.141. La imagen del objeto lejano creada por el objetivo se encuentra en el plano focal de éste. Dicha imagen desempeña para la lente ocular (divergente) el papel de objeto virtual. La imagen virtual que observa el ojo debe encontrarse a la distancia $b_1 = -d$, donde d es la distancia de visión óptima. Si a es la distancia entre el ocular y el plano focal del objetivo, por la fórmula de la lente tenemos que $1/a_1 + 1/b_1 = 1/f$. Teniendo en cuenta que $a_1 = -a$, hallamos $a = -fd/(f + d)$. Cuando $d = d_1 = 20$ cm se obtiene que $a' = -fd_1/(f + d_1) = 5$ cm. Y cuando $d = d_2 = 50$ cm, será $a'' = -fd_2/(f + d_2) = 4,35$ cm. La distancia entre el objetivo y el ocular es $f_1 - a$, donde f_1 es la distancia focal del objetivo. Por lo tanto, el observador hipermétrope tiene que alargar más los tubos de los gemelos. Cuando el miope da los gemelos al hipermétrope, éste tiene que aumentar la longitud de los tubos en la magnitud $a' - a'' = 0,65$ cm.

Fotometría

4.142. La iluminación $E = 2I \cos \alpha / (l^2 + h^2) = 2Ih / (l^2 + h^2)^{3/2}$ (fig. 4.123), de donde la intensidad de la luz de la lámpara es $I = E (l^2 + h^2)^{3/2} / 2h \approx 110$ cd.

4.143. En ausencia del espejo la iluminación en el centro de la pantalla es $E = I/L^2$, donde I es la intensidad de la luz de la fuente, es decir, el flujo de energía luminosa referido a la unidad de ángulo sólido. En presencia del espejo la iluminación se determina por la relación $E_1 = I/L^2 + I_1/(3L)^2$, donde I es, como antes, la intensidad de la luz de la fuente, e I_1 , la intensidad de la

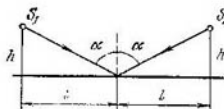


Fig. 4.123.

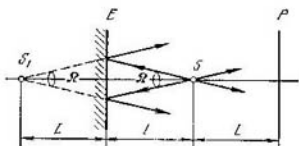


Fig. 4.124.

luz de la imagen en el espejo plano. Es fácil demostrar que para un espejo reflector ideal o perfecto $I_1 = I$. Efectivamente, el flujo luminoso dentro de un determinado ángulo sólido Ω (fig. 4.124), después de reflejarse en el espejo, se propagará dentro del mismo ángulo sólido Ω ; en este caso la magnitud del flujo tampoco varía (reflexión ideal o perfecta). Esto significa precisamente que $I_1 = I$. Por lo tanto, $E_1 = I/L^2 + I/(3L)^2 = 10E/9$.

4.144. Sea I_0 la intensidad de la luz de la lámpara. Hallamos el flujo luminoso que incide sobre la lente (y la imagen) en el primer caso (fig. 4.125): $\Phi_1 = I_0 \pi D^2 / 4a^2$. El área de la imagen es $S_1 = S_0 b^2 / a^2 = S_0 (L - a_1)^2 / a_1^2$,

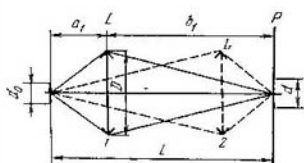


Fig. 4.125.

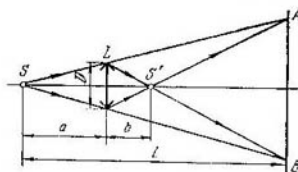


Fig. 4.126

donde S_0 es el área de la fuente. La iluminación $E_1 = \Phi_1 / S_1 = I_0 \pi D^2 / 4S_0 (L - a_1)^2$. En el segundo caso (fig. 4.125), de la simetría de la fórmula de la lente se sigue que $a_2 = b_1 = L - a_1$ y obtenemos que la iluminación es $E_2 = I_0 \pi D^2 / 4S_0 a_1^2$. Por la condición del problema, $E_2 / E_1 = 9$, de donde obtenemos la ecuación $(L - a_1)^2 / a_1^2 = 9$. Resolviéndola, hallamos que $a_1 = L/4 = 25$ cm. Por consiguiente, $b_1 = L - a_1 = 75$ cm y la distancia focal de la lente es $f = a_1 b_1 / (a_1 + b_1) = 3L/16 \approx 18,8$ cm.

4.145. $E_1 / E_2 = (1 + \beta_2)^2 / (1 + \beta_1)^2 = 4$.

4.146. La iluminación de la pantalla no varía si los rayos que pasan por la lente iluminan toda la región AB en que no inciden los rayos directos de la fuente (fig. 4.126). De la semejanza de triángulos se deduce que $|AB|/D = L/a$ y $|AB|/D = (L - a - b)/b$. Teniendo en cuenta que $a = L/2$, hallamos que $b = L/6$. Así, la distancia focal $f = ab/(a + b) = L/8 = 12,5$ cm.

4.147. $f = dDL/(D + d)^2 = 1,1$ m.

4.148. Si E_0 es la iluminación que crean los rayos que inciden sobre la lente, la iluminación en el centro de la pantalla, donde inciden únicamente los

rayos que han pasado a través de la lente (fig. 4.127, a), es $E_1 = E_0 f_1^2 / (L - f_1)^2$ (ya que despreciamos las pérdidas de flujo luminoso en la lente). En el segundo caso sale de la lente un haz de luz paralelo que incide sobre la pantalla (fig. 4.127, b). Su sección es f_1/f_2 veces menor que la sección a la entrada en el

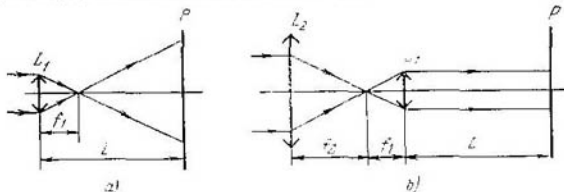


Fig. 4.127.

sistema; por consiguiente, la iluminación de la pantalla en este caso será $E_2 = E_0 f_1^2 / f_2^2 = E_0 f_1^2 / f_2^2$. La variación que experimenta la iluminación es $E_2/E_1 = (f_2^2/f_1^2) \times (L - f_1)^2/f_1^2 = 36$.

4.149. $E_2/E_1 = (f_2^2/f_1^2) (L + |f_1|)^2/f_1^2 = 16$.

4.150. La primera imagen del Sol se obtiene en el plano focal de la lente L_1 , es decir, a la distancia $f/2$ más allá de la lente L_2 . Esta imagen la crean los rayos que pasan por la primera lente, pero que no tocan la segunda. Estos rayos pasan la lente a través de un anillo de diámetro exterior D_1 , igual al diámetro de la

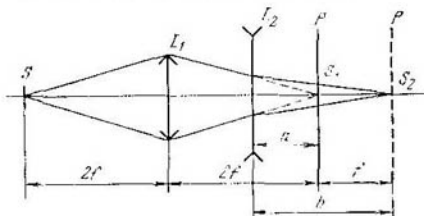


Fig. 4.128.

primera lente, y diámetro interior $D_1' = D_2/(f/2) = 2D_2$, donde D_2 es el diámetro de la segunda lente. Supongamos que E_0 es la iluminación de la primera lente por los rayos solares; entonces, a través de este anillo, pasa un flujo luminoso $\Phi_1 = E_0 \cdot (\pi/4) D_1'^2 = (2D_2)^2$. Si el diámetro angular del Sol es igual a α , el área de la imagen del Sol en la primera lente será $S_1 = (\pi/4) \alpha^2 f^2$. La iluminación de la primera imagen es $E_1 = \Phi_1/S_1 = (E_0/\alpha^2 f^2) (D_1'^2 - 4D_2^2)$. Esta imagen sirve de objeto para la segunda lente y se encuentra a la distancia $a = -f/2$ de ella.

Por la fórmula de la lente la imagen se obtiene a la distancia $b = a/(a - f) = f/3$. El área de esta imagen es $S_2 = S_1 (b/a)^2 = (4/9) \cdot (\pi/4) \alpha^2 f^2$. El flujo luminoso que pasa a través de la segunda lente es $\Phi_2 = E_0 \cdot (\pi/4) (2D_2)^2$. La iluminación de la segunda imagen es $E_2 = \Phi_2/S_2 = 9E_0 D_2^2/\alpha^2 f^2$. Como por la condición del problema $E_2 = E_1$ obtenemos que $D_1'^2 - 4D_2^2 = 9D_2^2$, de donde $D_1'/D_2 = \sqrt{13} \approx 3,6$.

4.151. Para la lente divergente L_2 , la imagen S_1 es el objeto y se encuentra a la distancia $-a$ de ella (fig. 4.128). Aplicando la fórmula de la lente y la condición $b - a = f$, hallamos que $a = f$ y $b = 2f$. Con esto el área de la imagen es $S_2 = S_1 (b/a)^2 = 4S_1$. Como el flujo luminoso no ha variado, la iluminación será $E_2 = E_0/4$.

4.152. Con la primera posición del espejo la iluminación de la pantalla es $E_1 = 5E/4$, donde E es la iluminación de la pantalla en ausencia del espejo. Si éste se desplaza, la iluminación de la pantalla será $E_2 = 2E$. La relación entre las iluminaciones es $E_2/E_1 = 1,6$.

4.153. Pasando por la lente, los rayos se cortan en su foco (fig. 4.129). Después de reflejarse en el espejo parecerá que parten del punto S' , siendo $SO = OS'$. Como, por la condición del problema, las dimensiones de la lente son pequeñas en comparación con su distancia focal, tenemos que $\Phi/\Phi_0 = (d/D)^2 = 1/4$, de donde hallamos que el diámetro del haz reflejado, en el plano de la lente, es $D = 2d$. De la semejanza de triángulos obtenemos que $(l + l - f)/f = D/d = 2$ y $l = 3f/2 = 30$ cm.

4.154. $\Phi/\Phi_0 = f^2/(2l + f)^2 = 0,16$.

4.155. $E_1/E = 1 + 4L^2/R^2 = 101$.

4.156. Al trozo de madera es más fácil prenderle fuego valiéndose del sistema óptico que crea sobre la superficie de aquél más iluminación, es decir, que concentra un mayor flujo de radiación sobre la unidad de superficie. Calculemos las iluminaciones creadas por la lente (E_1) y por el espejo cóncavo (E_2): $E_1 = \Phi_1/S_1$, $E_2 = \Phi_2/S_2$, donde Φ_1 y Φ_2 son los flujos luminosos que inciden sobre las imágenes del Sol, y S_1 y S_2 , las áreas de dichas imágenes. Si se omiten las pérdidas en la lente y en el espejo, los flujos luminosos Φ_1 y Φ_2 son proporcionales a las áreas de la lente y del espejo: $\Phi_1/\Phi_0 = d^2/D^2$. Los diámetros de las imágenes son $l_1 = \alpha f_1$ y $l_2 = \alpha f_2 = \alpha R/2$, donde α es la dimensión angular del Sol y f_1 y f_2 , las distancias focales de la lente y del espejo. Como S_1 es directamente proporcional a l_1^2 y S_2 , directamente proporcional a l_2^2 , tenemos que $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{dR}{D \cdot 2f_1} \right)^2 = 6,25$. Por lo tanto, al trozo de madera es más fácil prenderle fuego valiéndose de la lente.

4.157. Si la iluminación que crean los rayos solares directos es igual a E_0 , el flujo luminoso que pasa a través de la lente es $\Phi = E_0 \cdot (\pi/4) d^2$. El área de la imagen del Sol en la lente es $S = (\pi/4) (\alpha f)^2$. La iluminación de la imagen es $E = \Phi/S = E_0 d^2/(\alpha f)^2 = 900 E_0$. Como los escudos eran planos y sus dimensiones y la distancia hasta el navío tales que el ensanchamiento del haz reflejado puede despreciarse, los rayos paralelos que incidían sobre ellos seguían siendo paralelos después de reflejarse y la iluminación de la mancha reflejada era igual a E_0 . Para hacer arder la madera hubiera sido necesario que 900 guerreros hicieran coincidir simultáneamente en un punto del navío los rayos del Sol reflejados (a condición de que sus escudos reflejasen totalmente la luz que incidía sobre ellos).

4.158. Si las pérdidas en el vidrio no se toman en consideración, la iluminación de la pantalla cuando se interpone la lámina debe aumentar, ya que la imagen de la fuente de luz se obtiene más cerca de la pantalla y la intensidad de la luz de la fuente S y de su imagen S' son iguales. Esta última afirmación se demuestra por el hecho de que el ángulo entre dos rayos cualesquiera emergentes de la lámina es igual al ángulo entre estos rayos antes de la lámina y,

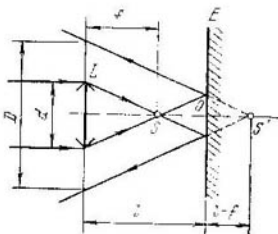


Fig. 4.129.

por lo tanto, un mismo flujo procedente de la fuente y de la imagen marcha por ángulos sólidos iguales.

Hallamos la posición de la imagen S' (fig. 4.130). Como por la condición del problema la pantalla es pequeña, los ángulos φ y ψ también lo son y sus senos y tangentes pueden sustituirse por los ángulos mismos. En la fig. 4.130 puede verse que $|AA_1| = \varphi L/3$, $|BB_1| = (\varphi + \psi) L/3$ y $|CC_1| = (2\varphi + \psi) L/3$. Por la ley de la refracción $\psi = \varphi/n$ y $|CC_1| = \varphi (2n+1) L/3n$. Por otra parte, $|CC_1| = \varphi L_1$. Obtenemos que $L_1 = L (2n+1)/3n$. En estas

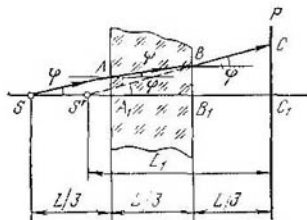


Fig. 4.130.

condiciones la iluminación de la pantalla, omitiendo las pérdidas en el vidrio, sería $E_1 = E (L/L_1)^2 = E \cdot 9n^2/(2n+1)^2$. En realidad la iluminación no varía. Por consiguiente, la fracción de energía que se pierde es

$$\alpha = (E_1 - E)/E_1 = (5n^2 - 4n - 1)/9n^2 = 0,21 = 21\%.$$

$$4.159. \alpha = 1 - f^2/L^2 \approx 0,55 = 55\%.$$

4.160. Si r es el radio de la Luna, R , la distancia desde la Luna hasta la Tierra y E_0 , la iluminación debida al Sol, el flujo luminoso que incide sobre la Luna

es $\Phi_l = E_0 \cdot \pi r^2$ y el flujo difundido por la Luna, $\Phi_d = (1 - \alpha) \Phi_l$. El flujo difundido por ángulo sólido unitario, es decir, la intensidad de la luz de la Luna, es $I = \Phi_d/2\pi = (1 - \alpha) r^2 E_0/2$. La iluminación que crea la Luna sobre la Tierra es $E = I/R^2 = (1 - \alpha) r^2 E_0/2R^2$. Como $\varphi = 2r/R$, hallamos que $E_0/E = 8/(1 - \alpha) \varphi^2 = 8 \cdot 10^5$.

4.161. Si D es el diámetro del objetivo del telescopio, el flujo luminoso que entra en él es $\Phi = E \cdot \pi D^2/4$. El área de la imagen de la Luna sobre la película fotográfica es $S = \pi (\alpha f)^2/4$. La iluminación de la imagen $E_1 = (E/\alpha^2) (D/f)^2$. Durante el tiempo de exposición llega a la unidad de área de la película la energía luminosa $H = E_1 \tau$. De estas relaciones se obtiene que la luminosidad del objetivo es $(D/f)^2 = H \alpha^2/E \tau = 10^{-2}$.

$$4.162. \tau = (H \alpha^2/E) (f/D)^2 = 10^{-3} \text{ s.}$$

4.163. La imagen del Sol en el objetivo se encuentra en el plano focal de éste. El diámetro de la imagen es $d = \alpha f_1$ (fig. 4.131). Como el aumento del ocular es $\beta = (b - f_2)/f_2$, el diámetro de la imagen de Sol es $D = \alpha f_1 (b - f_2)/f_2$, y el área de la imagen sobre la pantalla, $S = \pi D^2/4$. Para hallar el flujo luminoso que pasa por el anteojo determinamos qué montura lo limita más, la de la lente del objetivo o la del ocular. Supongamos que el flujo luminoso llena totalmente el ocular. El diámetro de este haz sobre el objetivo es $D_0 = d_2 f_1/a = d_2 f_1 (b - f_2)/b f_2 = 8,75 \text{ cm}$ (fig. 4.131). Como hemos obtenido que $D_0 < d_1$, nuestra suposición ha resultado ser acertada, es decir, el flujo luminoso que pasa por el anteojo lo limita el diámetro del ocular y es $\Phi = E_0 \cdot \pi D_0^2/4$, y la iluminación de la imagen es $E = \Phi/S = E_0 (D_0/D)^2$. Utilizando las expresiones de D y D_0 se obtiene que $E/E_0 = (d_2/\alpha b)^2 = 6,25$.

$$4.164. E/E_0 = \left[\frac{fD}{\alpha f_2 (f_1 - f/2)} \right]^2 = 25.$$

4.165. Consideremos el haz de rayos paralelo procedente de un elemento determinado del disco lunar que se encuentre en el eje óptico del anteojo (fig. 4.132). El diámetro d del haz que sale del anteojo es igual a $D f_2/f_1$, donde f_1 y f_2 son las distancias focales del objetivo y del ocular, y D , el diámetro del objetivo. La iluminación de la imagen sobre la retina del ojo depende de la relación entre el diámetro d del haz y el diámetro de la pupila d_p .

Si $d \leq d_p$, toda la energía luminosa que entra por el objetivo llega a la retina. La iluminación de la imagen es proporcional al flujo luminoso que pene-

tra por la pupila (es decir, proporcional a D^2) e inversamente proporcional al área de la imagen sobre la retina (es decir, inversamente proporcional al cuadrado del aumento del anteojo $(f_1/f_2)^2$). Por lo tanto, cuando $d \leq d_p$ tenemos que $E \propto D^2 (f_2/f_1)^2$.

Si $d > d_p$, por la pupila sólo penetrará una parte del flujo luminoso que entra por el objetivo. En la fig. 4.132 se ve que, en este caso, el diámetro del haz de rayos entrante, que penetra por la pupila, es $D' = (f_1/f_2) d_p$ y, por consiguiente, $E' \propto D'^2 (f_2/f_1)^2 = d_p^2$.

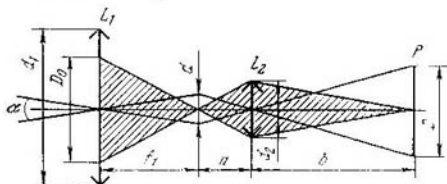


Fig. 4.131.

La iluminación E_0 de la imagen sobre la retina en el caso en que la Luna se observa a simple vista es proporcional a d_p^2 . Por lo tanto, si se cumple la condición $d \geq d_p$, la iluminación de la imagen sobre la retina del ojo cuando la observación se hace con el anteojo es la misma que cuando se hace a simple vista

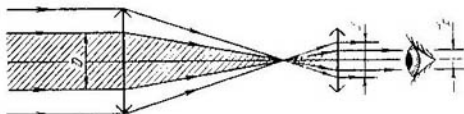


Fig. 4.132.

Cuando $d < d_p$, la iluminación de la imagen sobre la retina empleando el anteojo, es menor que E_0 . Por la condición del problema

$$\frac{E_0}{E} = \frac{d_p^2}{D^2 (f_2/f_1)^2} = 4, \text{ de donde } f_2 = \frac{d_p}{2D} f_1 = 1 \text{ cm.}$$

4.166. Al disminuir el diámetro del objetivo del anteojo desde 15 hasta 7.5 cm, la iluminación de la imagen de la superficie lunar sobre la retina del ojo no variará. Pero si se continúa disminuyendo dicho diámetro, la iluminación también empieza a disminuir. Cuando $D = 5$ cm resulta ser igual a $4E_0/9$, donde E_0 es la iluminación en el caso del objetivo sin diafragmar (véase la solución del problema 4.165).

4.167. $L_1 = \gamma L = 10$ km.

4.168. $L_1 = DL/d_p = 20$ km.

4.169. En ausencia de absorción por el aire, la iluminación disminuye con la distancia según la ley $E = I/r^2$. Con esto el destello 100 veces más intenso produce la misma iluminación a una distancia 10 veces mayor, es decir, a la distancia de 10 km. Pero por la condición del problema, esta iluminación se

crea a la distancia de 5 km; por consiguiente, no puede despreciarse la absorción de la luz por la atmósfera. Designemos por α el coeficiente de debilitamiento de la luz a la distancia de 1 km. De la condición del problema se infiere que $I\alpha/l^2 = 100I\alpha^2/5^2 = nI\alpha^2/9^2$, de donde $\alpha^4 = 1/4$ y $n = 9^2/\alpha^2 \approx 1300$, es decir, el destello debe ser 1300 veces más brillante.

4.170. Calculemos hasta qué distancia L_0 intercepta la lente todo el haz de luz: $L_0 = D/\alpha = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}$. Por consiguiente, cuando la distancia aumenta desde 5 hasta 10 km, la señal sólo se debilita a causa de la absorción de la luz por la atmósfera. A mayores distancias la señal se debilitará también porque la lente únicamente podrá interceptar parte del haz. La absorción de la luz por la atmósfera hace que la señal se debilita en 2 veces cada 5 km, es decir, al trasladarse desde 10 hasta 20 km, la señal disminuirá 4 veces. A la distancia de 20 km incide sobre la lente una parte del haz igual a $(D/\alpha L)^2 = 1/4$, por lo que, en total, la señal resulta ser 16 veces más débil.

4.171. La cantidad de energía absorbida es proporcional a la masa de vapor de agua que hay en el camino del rayo. Calculemos la masa de aire húmedo que hay en el camino horizontal de 4.35 km de longitud, siendo la sección del haz igual a 1 cm^2 . $m_1 = \mu P_0 V/RT = 517 \text{ g}$. La masa de vapor húmedo que hay en una columna vertical, de sección $S = 1 \text{ cm}^2$, que atraviesa toda la atmósfera de la Tierra es $m_2 = P_0 S/g = 1033 \text{ g} = 2m_1$. Es decir, la absorción de energía al pasar la radiación verticalmente a través de toda la atmósfera es igual a la absorción de energía cuando la radiación recorre a lo largo de la superficie de la Tierra la distancia $2L = 2 \cdot 4.35 \text{ km}$. Por consiguiente, el coeficiente de absorción $\alpha = 25$.

4.172. La radiación se debilita 2500 veces (véase la solución del problema 4.171).

4.173. Cada gotita que se encuentra en el camino del haz difunde la radiación que incide sobre su sección transversal πr^2 . Si la sección del haz es S y el número de gotitas por unidad de volumen, N , en un pequeño trozo de longitud Δl el haz experimenta la difusión en $NS\Delta l$ gotitas y la parte difusa de la energía es $\alpha = \pi^2 NS\Delta l/S$. El número de gotitas por unidad de volumen es $N = \frac{\gamma}{4\pi r^3 \rho/3}$, donde ρ es la densidad del agua. Así, pues, $\alpha = 3\gamma\Delta l/4pr$. Una parte igual de la energía, en los dos casos que consideramos, será difundida en trozos de camino ligados por la relación

$$\frac{\gamma_1}{r_1} \Delta l_1 = \frac{\gamma_0}{r_0} \Delta l_0, \text{ o bien } \Delta l_1 = \frac{\gamma_0 r_1}{\gamma_1 r_0} \Delta l_0 = 2.5 \Delta l_0.$$

De aquí se sigue que $l_1 = 2.5 l_0 = 2.5 \text{ km}$.

Observación. Advertimos que el debilitamiento de un haz a grandes distancias depende de la longitud del camino de un modo más complejo. Para las grandes distancias no se puede considerar que sobre todas las gotitas de niebla que hay a lo largo del camino del haz incide la radiación con la misma energía, como esto se ha supuesto en el caso de un pequeño trozo de camino al escribir la primera relación. Por eso, al resolver el problema, se hace la comparación de los debilitamientos en pequeños trozos de camino y, como su relación no depende de la intensidad del haz ni de la longitud del camino, el resultado se extiende al caso de las distancias grandes.

4.174. $\gamma_2 = \gamma_1 l_1 r_2 / l_2 r_1 = 0.2 \text{ g/m}^3$ (véase la solución del problema 4.173).

4.175. Veamos la fig. 4.133, en la cual se representan esquemáticamente las sucesivas reflexiones y refracciones múltiples de la luz en una lámina de caras plano paralelas, siendo, por la condición del problema, pequeño el ángulo de incidencia φ . Sea E_0 la energía de la luz incidente. La energía total de la luz reflejada será $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$. Se llama índice de reflexión la razón de la energía reflejada a la incidente, es decir, la relación $R = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots)/E_0$. Como en cada reflexión del rayo en el límite de separación vidrio-aire se refleja la p -ésima parte de la energía del rayo incidente, según la ley de conservación de la energía, pasará a través de dicho límite la $(1-p)$ -ésima parte. Por lo tanto, la energía del primer rayo reflejado, después

de experimentar una vez la reflexión, es $E_1 = \rho E_0$. El segundo rayo reflejado pasa dos veces a través del límite de separación y se refleja una vez (en el límite inferior). Su energía es $E_2 = \rho (1 - \rho)^2 E_0$. El tercer rayo pasa también dos veces a través del límite y se refleja tres veces; por consiguiente, $E_3 = \rho^3 (1 - \rho)^2 E_0$ y así sucesivamente. De este modo $R = \rho + \rho (1 - \rho)^2 + \rho^3 (1 - \rho)^2 + \rho^5 (1 - \rho)^2 + \dots = \rho + \rho (1 - \rho)^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots)$. Es fácil

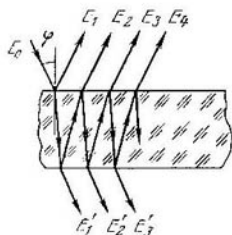


Fig. 4.133.

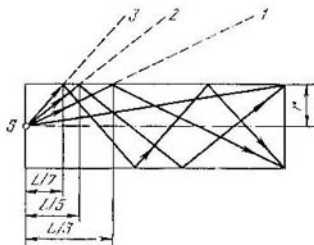


Fig. 4.134.

advertir que la expresión entre paréntesis rectangulares es una progresión geométrica decreciente indefinidamente ($\rho^2 < 1$). La suma de sus términos es igual a $1/(1 - \rho^2)$. Por consiguiente, en definitiva se obtiene que $R = 2\rho/(1 + \rho)$.

4.176. Como puede verse en la fig. 4.134, los rayos que no sufren reflexión hasta llegar a la célula fotoeléctrica van por dentro de un cono de ángulo sólido $\Omega_n = \pi r^2/L^2$. Los rayos que sufren una sola reflexión en las paredes van por

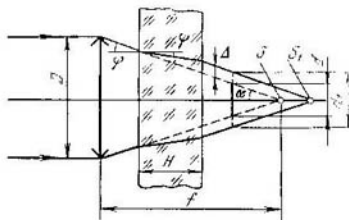


Fig. 4.135.

dentro de un cono hueco entre los ángulos Ω_1 y $\Omega_2 = \pi r^2 (L/3)^{-2} = 9\pi r^2/L^2$; los que sufren dos reflexiones se propagan entre los ángulos Ω_1 y $\Omega_2 = \pi r^2 \times (L/5)^{-2} = 25\pi r^2/L^2$; los que sufren tres, entre los ángulos Ω_2 y $\Omega_3 = \pi r^2 \times (L/7)^{-2} = 49\pi r^2/L^2$. El ángulo sólido $\Omega_3 - \Omega_2 = 24\pi r^2/L^2$. El flujo luminoso dentro de este ángulo sólido es $\Phi = I (\Omega_3 - \Omega_2) = 24\pi I r^2/L^2 = 7.5 \cdot 10^{-2}$ lm.

4.177. Cuando la lámina de vidrio se encontraba en el haz de luz paralelo incidente sobre la lente, no ejercía influencia alguna sobre la marcha de los rayos y éstos se enfocaban en el punto S (fig. 4.135). La célula fotoeléctrica, en este caso, estaba colocada de tal forma que su cátodo redondo, de diámetro d, cubría exactamente el flujo luminoso. Si ahora la lámina de vidrio se encuentra

entre la lente y la célula fotoeléctrica, a causa de la refracción en aquella los rayos se enfocan en el punto S_1 . Por consiguiente, el cátodo de la célula no cubre ya todo el flujo luminoso, cuyo diámetro en el plano en que se encuentra el cátodo es igual ahora a d_1 . Designando por Δ el desplazamiento vertical del rayo después de introducir la lámina, $d_1 = d + 2\Delta$. Con la disposición inicial todo el flujo Φ_0 incidía sobre una superficie cuyo diámetro era d , con la segunda disposición, este mismo flujo pasa en el plano del cátodo a través de una superficie de diámetro d_1 ; por consiguiente, la iluminación del cátodo de la célula fotoeléctrica en el segundo caso es $E_1 = E_0 d^2/d_1^2 = E_0 d^2/(d + 2\Delta)^2$, donde E_0 es la iluminación en el primer caso.

La corriente que pasa por la célula fotoeléctrica es proporcional a la iluminación de su cátodo; por lo tanto, en el segundo caso el galvanómetro indica la corriente $I_1 = I d^2/(d + 2\Delta)^2$. Se ve fácilmente que

$$\Delta = H (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi) = H \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg} \varphi).$$

Teniendo en cuenta la pequeñez del ángulo de incidencia y advirtiendo que $\varphi = \alpha$, tenemos que $\alpha \approx H \operatorname{tg} \alpha (1 - 1/n)$. Pero $\operatorname{tg} \alpha = D/2f$, de donde obtenemos

$$I_1 = I \frac{d^2}{[d + (1 - 1/n) H D/2]^2}.$$

4.178. Cuando la temperatura de la bola se estabiliza, la energía que recibe ésta en la unidad de tiempo, a expensas de la absorción de los rayos luminosos, es igual a la energía que se disipa durante el mismo tiempo a causa del intercambio calorífico con el aire circundante. Cuando la bola está iluminada por los rayos del Sol directos, la ecuación del balance térmico se escribe en la forma $\Phi_1 = k \cdot 4\pi r^2 (t_1 - t_0)$, donde Φ_1 es el flujo luminoso que incide sobre la superficie de la bola; k , un factor de proporcionalidad, y r , el radio de la bola. Cuando sobre la bola se proyecta la imagen del Sol, tenemos que $\Phi_2 = k \cdot 4\pi r^2 (t_2 - t_0)$. Si Φ_2 es el flujo luminoso que incide sobre la lente, será $\Phi_1/\Phi_2 = S_1/S_2$, donde S_1 es el área de la sección transversal de la bola y S_2 , el área de la lente. Por otra parte, $\Phi_2/\Phi_3 = S_2/S_3$, donde el área de la imagen del Sol $S_3 = \pi \alpha^2 f^2/4$. De este modo, $\Phi_1/\Phi_3 = S_1/S_3 = \alpha^2 f^2/D^2$. Por consiguiente,

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{D^2}{\alpha^2 f^2}, \quad \text{o bien} \quad t_2 = t_0 + \frac{D^2}{\alpha^2 f^2} (t_1 - t_0).$$

4.179. Sea E_0 la iluminación de la pantalla por los rayos solares directos. Sobre la bola mate incide el flujo luminoso $\Phi_0 = E_0 \cdot \pi d^2/4$. Por la ley de conservación de la energía, el mismo flujo luminoso es difundido por la bola uniformemente en todas las direcciones. Por consiguiente, la bola emite por unidad de ángulo sólido un flujo luminoso $\Phi_1 = \Phi_0/4\pi = E_0 d^2/16$.

Elijamos en la región de la sombra una superficie pequeña σ , que, desde la superficie de la bola se vea bajo el ángulo sólido $\Omega = \sigma/H^2$ (fig. 4.136). La iluminación de esta superficie es $E = \Phi_1 \Omega/\sigma = E_0 d^2/16 H^2 = 1,55 \cdot 10^{-4} E_0$. En la región iluminada la iluminación E' de la superficie se compone de las iluminaciones que crean los rayos directos (E_0) y de la luz difusa (E_1). Teniendo en cuenta que la luz difusa incide sobre la superficie bajo el ángulo α y que la distancia desde la bola hasta la superficie es $H_1 = H/\cos \alpha$, tenemos que $\Omega_1 = \sigma \cos \alpha/H_1^2 = \sigma \cos^3 \alpha/H^2$ y, por consiguiente, $E_1 = E_0 d^2 \cos^3 \alpha/16 H^2$. La iluminación en esta región es $E = E_0 (1 + d^2 \cos^3 \alpha/16 H^2)$, es decir, prácticamente no depende de la presencia de la bola.

4.180. Consideremos un elemento σ , suficientemente pequeño, de la fuente extensa. Los rayos luminosos de este elemento, después de atravesar el orificio, crean sobre el vidrio mate B una mancha cuyo diámetro $D = 2d$ (fig. 4.137).

La iluminación de esta mancha creada por el elemento σ es $E_1 = \frac{\Phi \Omega \sigma}{\pi D^2/4} = \frac{\Phi \Omega \sigma}{\pi d^2}$,

donde Ω es el ángulo sólido bajo el cual se ve el orificio desde el elemento considerado de la fuente. Si se cumple la condición $d \ll a$, puede escribirse que

$\Omega = \pi d^2/4a^2$ y, por lo tanto, $E_1/\sigma = \Phi/4a^2$. La relación E_1/σ tiene el sentido de la iluminación creada sobre el vidrio mate B por los rayos luminosos de la superficie unitaria de la fuente. Para determinar la iluminación total E basta multiplicar la relación E_1/σ por el área de la parte de superficie de la fuente extensa que envía rayos luminosos al punto O . Trazamos líneas rectas desde el punto O , pasando por los bordes del orificio (líneas de trazos en la fig. 4.137).

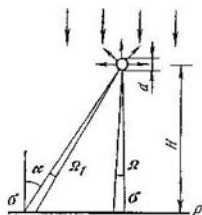


Fig. 4.136.

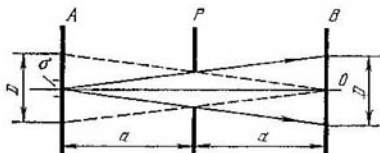


Fig. 4.137.

El cono que forman estas rectas destaca sobre la superficie de la fuente extensa un círculo de diámetro $D = 2d$. Por lo tanto, $S = \pi D^2/4 = \pi d^2$ y $E = E_1 S/\sigma = \pi \Phi d^2/4a^2$.

4.181. La energía de la radiación se retira por dos vías: una parte de ella sale por el orificio y otra es absorbida por las paredes de la cámara. Si la radiación dentro de ésta es tal que sobre la unidad de área de superficie incide en la unidad de tiempo la energía E , por el orificio sale el flujo $\Phi_1 = E\sigma$, y las paredes absorben el flujo $\Phi_2 = E(S - \sigma)\alpha$. Por la ley de conservación de la energía, el flujo que entra en la cámara por unidad de tiempo es $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. De estas relaciones obtenemos que $\Phi_1/\Phi = [1 + \alpha(S - \sigma)/\sigma]^{-1} = 1/3$.

4.182. $\alpha = \frac{1-2n}{n} \frac{\sigma}{S-2\sigma} = 0,012 = 1,2\%$ (véase la solución del problema 4.181).

Elementos de física ondulatoria

4.183. Cada uno de los espejos da una imagen virtual de la fuente S (fig. 4.138). Las fuentes S_1 y S_2 son coherentes, ya que son imágenes de una mis-

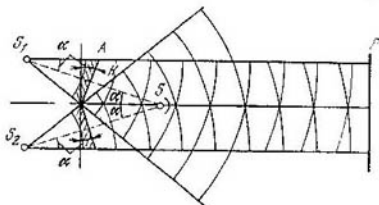


Fig. 4.138.

ma fuente. Por eso, en la región en que los haces de luz que parten de estas fuentes se superponen es posible observar una figura de interferencia. La anchura de

los haces se determina por la posición de la fuente y las dimensiones del espejo. Para que los haces puedan cortarse sobre una pantalla lejana es necesario que el rayo que pasa por el borde del espejo vaya (cuando es mínimo el tamaño del espejo) paralelamente al eje del sistema. En este caso $\angle AS_1K = \angle KSO = \alpha$. Del triángulo AS_1K tenemos que $a/2d = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ (puesto que el ángulo α es pequeño $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$). Así, pues, $a \approx 2d\alpha = 2 \text{ cm}$.

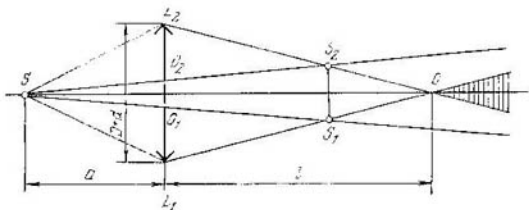


Fig. 4.139.

4.184. Por medio de la lente cortada se obtienen dos fuentes de luz coherentes S_1 y S_2 (fig. 4.139). La figura de interferencia se puede observar en la región donde los haces luminosos de las fuentes S_1 y S_2 se superponen, es decir, más allá del punto O (fig. 4.139), que se encuentra en el eje, a la distancia l detrás de la lente. Como por la condición del problema $a = 2f$, las imágenes de la fuente también se encontrarán a la distancia $2f$ de la lente. De la semejanza de los

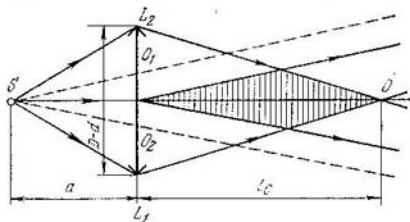


Fig. 4.140.

triángulos SS_1S_2 y SO_1O_2 se sigue que la distancia entre las fuentes es igual a $2d$. Y de la semejanza de los triángulos S_1S_2O y L_1L_2O se obtiene que $(D + d)/2d = l/(l - a)$, de donde $l = (D + d)ad/(D - d) = 1,22 \text{ m}$.

4.185. $l < l_0 = \frac{(D-d)af}{(D-d)(a-f) + da} = 1,125 \text{ m}$ (véase la fig. 4.140 y la solución del problema 4.184).

4.186. Por la construcción que se da en la fig. 4.141 puede verse que el tamaño de la figura de interferencia sobre la pantalla es igual al segmento DC . De la semejanza de los triángulos $S'AA'$ y $S'DO$ tenemos que $|DO| = aL/b$. Y de la semejanza de los triángulos $S'BB'$ y $S'CO$ se halla que $|CO| = aL/(b + d)$. Por lo tanto, $|DC| = |DO| - |CO| = aLd/b(b + d) = 16,6 \text{ cm}$.

4.187. La diferencia de marcha entre las ondas que inciden en el punto A procedentes de las fuentes S_1 y S_2 es $d = \sqrt{H^2 + l^2} - H \approx l^2/2H$. El oscure-

cimiento se observa si la diferencia de marcha es igual a un número impar de semiondas: $\lambda/2 = l_1^2/2H$, $3\lambda/2 = l_2^2/2H$, de donde $l_2 = \sqrt{3} l_1 = 3,46 \text{ mm}$.

4.188. $\Delta L = 6 \text{ m}$ (véase la solución del problema 4.187).

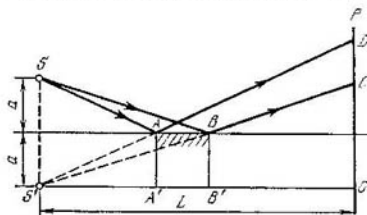


Fig. 4.141.

4.189. Supongamos que en cierto instante la fuente S se encuentra a la distancia l del eje del sistema. Con esto la diferencia de marcha Δx entre los

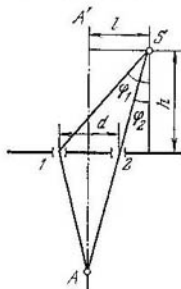


Fig. 4.142.

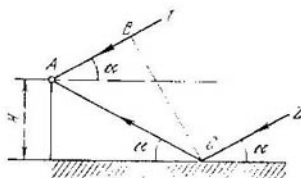


Fig. 4.143.

rayos que pasan por ambas rendijas y que llegan al receptor A (fig. 4.142) es

$$\Delta x = h (1/\cos \varphi_1 - 1/\cos \varphi_2).$$

Como por la condición del problema los ángulos φ_1 y φ_2 son pequeños, tenemos que

$$\cos \varphi_1 \approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} = 1 - \frac{(l+d/2)^2}{2h^2},$$

$$\cos \varphi_2 \approx 1 - \frac{(l-d/2)^2}{2h^2}.$$

Así, $\Delta x \approx ld/h$. En el tiempo $T = 1/f$ la diferencia de marcha varía en λ y la distancia l varía en la magnitud vT : $\lambda = vd/fh$, de donde $v = \lambda hf/d = 4,5 \text{ mm/s}$.

4.190. Al receptor llegan los rayos que vienen directamente del satélite y los que se han reflejado en la superficie del lago (fig. 4.143). La diferencia de

marcha entre ellos es $\Delta x = |AC| - |AB|$ (BC es perpendicular a los rayos 1 y 2). De la fig. 4.143 tenemos que $|AC| = H/\sin \alpha$ y $|AB| = H \cos 2\alpha/\sin \alpha$. Como el ángulo α es pequeño, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos 2\alpha \approx 1 - (2\alpha)^2/2$ y $\Delta x \approx 2H\alpha$. Los máximos de intensidad se observan si la diferencia de marcha es igual a un número entero de longitudes de onda λ : $2H(\alpha_2 - \alpha_1) = \lambda$, y la frecuencia de la señal es $f = c/\lambda = c/2H(\alpha_2 - \alpha_1) \approx 10^6$ Hz.

4.191. Supongamos que como resultado de la rotación de la Tierra las antenas giran un ángulo φ respecto de la dirección a la estrella (fig. 4.144). La diferencia de marcha entre los rayos 1 y 2 es $\Delta x \approx L\varphi$ (el ángulo φ es pequeño

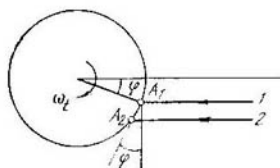


Fig. 4.144.

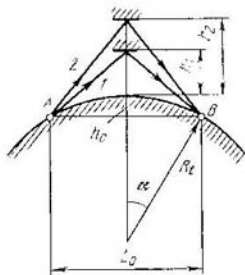


Fig. 4.145.

y L también es pequeña comparada con el radio de la Tierra). La diferencia de fases entre las oscilaciones de las antenas 1 y 2 es

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \approx -\frac{2\pi L\varphi}{\lambda} = -\frac{2\pi L\omega_T t}{\lambda},$$

donde ω_T es la velocidad angular de rotación de la Tierra, y λ , la longitud de onda de la señal de radio de la estrella. Si la frecuencia de esta señal es igual a ω , la señal de la antena 1 será $a_1 = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ y la señal de la antena 2, $a_2 = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$. En el receptor estas señales se suman y se obtiene la oscilación

$$a = a_1 + a_2 = a_0 \cdot 2 \cos(\Delta\varphi/2) \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi/2).$$

Su amplitud $A_0 = 2a_0 \cos(\Delta\varphi/2) \approx 2a_0 \cos(\pi L\omega_T t/\lambda)$, es decir, la amplitud de la oscilación resultante varía según una ley armónica con el período $T = 2\lambda/L\omega_T = \lambda T_T/\pi L \approx 2,3$ min.

4.192. Hallamos la diferencia de fase entre los rayos 1 y 2 que llegan al receptor B (fig. 4.145). La longitud del arco AB es igual a 2000 km y el radio de la Tierra, a 6400 km. El ángulo $\alpha \approx 0,156$ rad $\approx 9^\circ$, es decir, el ángulo α es pequeño. La altura $h_0 = R_T(1 - \cos \alpha) \approx R_T\alpha^2/2 \approx 80$ km. La longitud de la cuerda AB es $L_0 \approx R\alpha = L$. Para la diferencia de marcha de los rayos 1 y 2 tenemos (tomando en consideración que $h_1 + h_0$ y $h_2 + h_0 \ll L/2$), que

$$\begin{aligned} x &= 2 \left(\sqrt{(L/2)^2 + (h_0 + h_2)^2} - \sqrt{(L/2)^2 + (h_0 + h_1)^2} \right) \approx \\ &\approx 2L \left[(h_0 + h_2)^2/L^2 - (h_0 + h_1)^2/L^2 \right] = 2(h_2 - h_1)(2h_0 + h_1 + h_2)/L. \end{aligned}$$

La diferencia de fase $\Delta\varphi = 2\pi x/\lambda = 2\pi x/c$. En el receptor se suman las oscilaciones

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0), \\ a_2 &= a_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0 + \Delta\varphi). \end{aligned}$$

La oscilación resultante es

$$a = a_1 + a_2 = 2a_0 \cos(\Delta\varphi/2) \cos(2\pi ft + \varphi_0 + \Delta\varphi/2).$$

La amplitud de esta oscilación es $A_0 = 2a_0 \cos(\Delta\varphi/2)$, y su intensidad,

$$I = A_0^2 = 4a_0^2 \cos^2 \left[\frac{2\pi f}{cL} (h_2 - h_1) (2h_0 + h_1 + h_2) \right].$$

Si L varía en la magnitud l , pequeña en comparación con L , la variación de la diferencia de fase entre los rayos 1 y 2 será

$$\delta\varphi \approx \frac{d(\Delta\varphi)}{dL} l = \frac{4\pi f}{L^2 c} (h_2 - h_1) (2h_0 + h_1 + h_2) l.$$

La variación de la fase en 2π determina el período de variación de la intensidad. El valor correspondiente es

$$l_0 = L^2 c / 2f (h_2 - h_1) (2h_0 + h_1 + h_2) \approx 180 \text{ m}.$$

Si este valor de l_0 se designa por Λ y $4a_0^2$, por I_0 , la ley de la variación de la intensidad de la señal con la distancia l se escribe en la forma $I = I_0 \cos^2 \times (2\pi l/\Lambda)$.

4.193. a) A causa de la difracción en los bordes del espejo del telescopio el rayo láser se ensancha paulatinamente y a grandes distancias su diámetro será considerablemente mayor que el del espejo. Como es sabido por la teoría de la difracción, la semianchura angular del rayo es $\varphi \approx \lambda/D = 2.6 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0.05''$. La exactitud de la colocación del eje óptico del telescopio debe ser esa misma, de lo contrario el rayo reflejado no incidiría a su regreso sobre el telescopio.

b) El radio de la mancha luminosa sobre la Luna será $R_1 = D/2 + \varphi L \approx \varphi L = 100 \text{ m}$. La parte de la energía que llega al reflector será $k_1 = d^2/4R_1^2 = 10^{-6}$. El radio del rayo que incide de regreso sobre el telescopio es $R_2 \approx \lambda L/d = 1.3 \text{ km}$. La parte de la energía reflejada que llega a dicho telescopio es $k_2 = D^2/4R_2^2 = 10^{-6}$. Por lo tanto, la parte de la energía del láser que llega al fotorreceptor es $k_0 = k_1 k_2 = 10^{-12}$.

c) Si la observación se hace a simple vista, a la pupila del ojo llega, después de reflejarse en la Luna, la parte de la energía $k_p = k_0 (d_p/D)^2 = 3.7 \times 10^{-18}$. El número de cuantos de luz que llegan a la pupila es $N = k_p E/h\nu = k_p E\lambda/hc = 12$. Como $N < n$, el ojo no percibe la señal reflejada.

d) En ausencia del reflector, la superficie de la Luna difunde el 10% de la energía del láser uniformemente en un ángulo sólido igual a 2π . El ángulo sólido bajo el cual se ve el espejo del telescopio desde la Luna es $\Omega = \pi D^2/4L^2$. La parte de la energía del láser que llega al telescopio en este caso es

$$k = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\pi D^2}{4L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2} = 5 \cdot 10^{-19}.$$

La ventaja que reporta el empleo del reflector es, por lo tanto, $\beta = k_0/k = 2 \cdot 10^8$.

Elementos de óptica cuántica.

Efecto fotoeléctrico

4.194. Toda la potencia luminosa P_0 de la fuente puntual es radiada en el ángulo sobre 4π ; por consiguiente, al ojo, que se encuentra a la distancia L de la fuente (fig. 4.146), llega la potencia $P = P_0\Omega/4\pi = P_0 d_p^2/16L^2$. Calculamos el número de fotones (cuantos de energía) que llegan, por unidad de tiempo, al ojo que se halla a dicha distancia. La energía de un fotón es $E = h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν , la frecuencia de la radiación electromagnética.

Como $v = c/\lambda$ (c es la velocidad de la luz y λ , la longitud de la onda de la radiación), tenemos que $E = hc/\lambda$. Por lo tanto, en la unidad de tiempo llegan al ojo $n = P/E$ fotones: $n = P_0 d_p^2 \lambda / 16 L^2 h c$. Por la condición del problema, el ojo

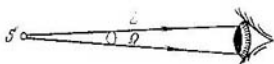


Fig. 4.146.

reacciona a la luz si $n > 60 \text{ s}^{-1}$. Este número de fotones llega al ojo a la distancia

$$L = \frac{d_p}{4} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{n h c}} \approx 10^6 \text{ m} = 10^3 \text{ km}.$$

4.195. A diferencia del problema anterior, en este caso la luz se propaga no en todas las direcciones, sino en un cono estrecho cuyo ángulo de apertura

es α . En estas condiciones $L = \frac{d_p}{\alpha} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{n h c}} = 5 \cdot 10^6 \text{ km}.$

4.196. $A = h\nu_0 - eV_r = 3,35 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,1 \text{ eV}.$

4.197. $A = 2e(1,5V_1 - V_2) = 1,2 \text{ eV} = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$

4.198. $h = 5\lambda e \Delta V / c = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$

4.199. Escribimos la ecuación de Einstein para ambas longitudes de onda:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eV_1, \quad \frac{hc}{\lambda_2} = A + eV_2, \text{ de donde } V_2 = V_1 + \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 2,23 \text{ V}.$$

4.200. De acuerdo con la ecuación de Einstein, el umbral rojo del efecto fotoeléctrico determina el trabajo de extracción A : $A = hc/\lambda_0$. Cuando el electrodo se ilumina con luz violeta, la energía cinética del electrón desprendido es $T = hc/\lambda - A = hc(1/\lambda - 1/\lambda_0)$. Esta energía la gasta en trabajo para vencer las fuerzas del campo eléctrico: $T = eEl$, de donde

$$l = \frac{T}{eE} = \frac{hc}{eE} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 1,5 \text{ cm}.$$

4.201. Los electrones desprendidos del cátodo por la acción de la luz tienen todas las direcciones posibles de la velocidad. Sobre el borde de la mancha del ánodo van a parar los electrones que se desprenden del borde del cátodo y tienen, al desprenderse, la velocidad dirigida paralelamente a las superficies del cátodo y del ánodo. Esta velocidad se halla por la fórmula de Einstein:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A, \text{ de donde } v_0 = \left[\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right) \right]^{1/2}.$$

Moviéndose con aceleración uniforme en dirección al ánodo, estos electrones recorren la distancia entre el cátodo y el ánodo en el tiempo $t = (2l/a)^{1/2}$, su aceleración es $a = eV/ml$ (ya que el cátodo y el ánodo forman un condensador plano). De este modo, $t = l(2m/eV)^{1/2}$. En este tiempo, a lo largo de la superficie del ánodo (y del cátodo), los electrones se desplazan una distancia $\Delta d = v_0 t$. El diámetro de la mancha en el ánodo es

$$D = d + 2\Delta d = d + 4l \left(\frac{hc/\lambda - A}{eV} \right)^{1/2} \approx 1,3 \text{ mm}.$$

4.202. El límite de onda corta del espectro de rayos X corresponde al caso en que toda la energía cinética del electrón se transforma en radiación, es decir, $T = hc/\lambda_0$. Como la velocidad de los electrones es comparable con la de la luz,

el cálculo por la fórmula no relativista $T = mv^2/2$ será inexacto. En este caso es más correcto utilizar la fórmula relativista de la energía cinética:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 c^2 \approx 7,4 \cdot 10^{-16} \text{ J},$$

de donde $\lambda_0 = hc/T = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS

Constante de la gravitación universal	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$
Aceleración normal de caída libre	$g = 9,8 \text{ m/s}^2$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 299\,792,46 \text{ km/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Constante magnética	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} = 12,6 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
Constante eléctrica	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Masa en reposo del electrón	$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
» » » protón	$m_p = 1836 m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Carga elemental	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Relación de la carga del electrón a su masa	$e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J/Hz}$ $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Unidad de masa atómica	$1 \text{ u.m.a.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Constante universal (molar) de los gases	$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Faraday	$F = 96,5 \cdot 10^3 \text{ C/mol}$
Volumen molar de un gas perfecto en condiciones normales ($T_0 = 273,15 \text{ K}$, $P_0 = 101\,325 \text{ Pa} \approx 10^5 \text{ Pa}$)	$V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$
Densidad del agua	10^3 kg/m^3
» » hielo	$0,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
» » mercurio	$13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Temperatura de ebullición del agua	$100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$
» de fusión del hielo	$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$
Calor específico del agua	$4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$
» » » hielo	$2100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$
Calor de vaporización del agua	$2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$
» » fusión del hielo	$0,32 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir,
1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 4-100, GSP, URSS.

